Уведомление об авторских правах.

Покупатель настоящим подтверждает, что осведомлён о том, что файлы электронной книги (книг) им приобретаемые защищены авторским правом РФ и могут быть использованы им исключительно в рамках, установленных настоящим Лицензионным соглашением. Покупатель подтверждает и соглашается с соблюдением авторского права относительно приобретения, загрузки, копирования или иного использования электронных книг. Покупатель не может предоставлять, сдавать в аренду, воспроизводить, распространять или иным коммерческим способом использовать приобретаемые электронные книги.

Электронная копия приобретаемой Покупателем публикации содержат уникальные электронные водяные знаки с указанием данных Покупателя, которые были указаны в учетной записи при оформлении покупки электронной в интернет-магазине издательства МЦНМО, в целях идентификации законного лицензиата публикации.

Приобретаемые публикации могут быть приобретены только для личного и персонального использования ограниченным кругом лиц. Покупатель обязуется обеспечить сохранность приобретаемой публикации и обеспечить её недоступность неограниченному кругу лиц, в том числе не допустить размещения её в открытом доступе в сети интернет.

Покупатель может загружать приобретенную копию электронной публикации на все свои персональные устройства (настольный компьютер, ноутбук, планшет, электронная книга, смартфон и т. п.).

В случае нарушения требований авторского права и положений настоящего Лицензионного соглашения Покупатель может быть привлечён к ответственности, предусмотренной законодательством РФ, а так же может быть принужден к возмещению убытков, принесённых Правообладателям его противоправными действиями.

С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин

Ленинградские математические кружки

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2022

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
Г34

Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.
Ленинградские математические кружки.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2022.
302 с.
ISBN 978-5-4439-3469-3

В этой книге отражены традиции и богатейший опыт внешкольного математического образования в Санкт-Петербурге (Ленинграде). В издание включён краткий исторический очерк о работе математических кружков в 1960–80-е гг.

Книга является одновременно и задачником, и методическим пособием, посвящённым первым двум годам работы математического кружка (6–8 классы).

Для учителей математики, руководителей кружков, учащихся и всех интересующихся нестандартными задачами.

Предыдущее издание книги было опубликовано в 1994 г. (г. Киров, издательство «АСА»).

Подготовлено на основе книги:
Генкин С. А., *Итенберг И. В.*, *Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. — Изд. новое, доп. — М.: МЦНМО, 2021. — 304 с. ISBN 978-5-4439-1469-5.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

© С. А. Генкин,
И. В. Итенберг,
Д. В. Фомин, 2021
© И. С. Рубанов (глава «Индукция»), 2021
© МЦНМО, 2022

ISBN 978-5-4439-3469-3

Оглавление

Предисловие **8**
Введение 8
Краткий исторический очерк 9
Как готовить и проводить занятия кружка 21
Структура текста и другие технические замечания 24
Спасибо! 25

Часть первая

Глава 1. Нулевой цикл **29**

Глава 2. Чётность **33**
§ 1. Чередование 33
§ 2. Разбиение на пары 34
§ 3. Чётность и нечётность 35
§ 4. Разные задачи 36

Глава 3. Комбинаторика–1 . . . . . **38**
§ 1. Простой подсчёт 38
§ 2. Перестановки и кратный подсчёт 42
§ 3. Дополнительные задачи 45

Глава 4. Делимость и остатки **48**
§ 1. Простые и составные 48
§ 2. Остатки 53
§ 3. Разные задачи 59
§ 4. Алгоритм Евклида 60

Глава 5. Принцип Дирихле **62**
§ 1. Клетки и кролики 62
§ 2. Вариации на тему 65
§ 3. Разные задачи 68

Глава 6. Графы–1 . . . . . **70**

§ 1. Понятие графа 70
§ 2. Степени вершин и подсчёт числа рёбер 73
§ 3. Несколько новых определений 75
§ 4. Эйлеровы графы 77

Глава 7. Неравенство треугольника **80**

§ 1. Введение 80
§ 2. Вспомогательные преобразования 82
§ 3. Дополнительные построения 84

Глава 8. Игры **86**

§ 1. Игры-шутки 86
§ 2. Симметрия 88
§ 3. Выигрышные позиции 90
§ 4. Анализ с конца — метод поиска выигрышных позиций . . . 92

Задачник первого года **97**

§ 1. Логические задачи 97
§ 2. Конструкции и взвешивания 99
§ 3. Геометрические задачи 103
§ 4. Задачи с целыми числами 104
§ 5. Смесь 107

Часть вторая

Глава 9. Индукция **109**

§ 1. Процесс и метод индукции 109
§ 2. ММИ и догадка по аналогии 118
§ 3. Классические задачи 119
§ 4. Другие схемы ММИ 125
§ 5. Задачи почти без комментариев 130

Глава 10. Делимость–2. Сравнения и диофантовы уравнения **132**

§ 1. Сравнения по модулю 132
§ 2. Десятичная запись и признаки делимости 136
§ 3. Уравнения в целых числах и другие задачи 140
§ 4. Малая теорема Ферма 145

Глава 11. Комбинаторика–2 . . . . . **148**

§ 1. Числа сочетаний 148
§ 2. Треугольник Паскаля 153
§ 3. Шары и перегородки 159
§ 4. Бином Ньютона 161
§ 5. Дополнительные задачи 162

Глава 12. Инвариант **165**

§ 1. Введение 165
§ 2. Раскраска 171
§ 3. Инвариант — остаток 172
§ 4. Разные задачи 175

Глава 13. Графы–2 . . . . . **177**

§ 1. Изоморфизм 177
§ 2. Деревья 181
§ 3. Теорема Эйлера 185
§ 4. Разные задачи 188
§ 5. Ориентированные графы 191

Глава 14. Геометрия **195**

§ 1. Два неравенства 196
§ 2. Движения плоскости и равенство фигур 199
§ 3. Подсчёт углов 202
§ 4. Площадь 205
§ 5. Разные задачи 207
§ 6. Послесловие 209

Глава 15. Системы счисления **211**

§ 1. Что это такое? 211
§ 2. Признаки делимости 214
§ 3. Примеры применения 216
§ 4. Игра «Ним» 218

Глава 16. Неравенства **220**

§ 1. Что больше? 220
§ 2. Главное неравенство 223
§ 3. Тождественные преобразования 227
§ 4. Индукция в неравенствах 229
§ 5. Неравенства на любой вкус 233

Задачник второго года **235**
§ 1. Чётность 235
§ 2. Принцип Дирихле 236
§ 3. Игры 238
§ 4. Задачи на конструкцию 240
§ 5. Геометрия 241
§ 6. Целые числа 243
§ 7. Принцип крайнего и полуинвариант 243
§ 8. Дискретная непрерывность 245
§ 9. Исследовательские задачи 246
§ 10. Смесь 249

Приложение. Математические соревнования **255**
§ 1. Введение 255
§ 2. Математический бой 256
§ 3. Математическая драка 259
§ 4. Олимпиада-марафон 260
§ 5. Математический хоккей 262
§ 6. Математический аукцион 263

Ответы, указания, решения **266**
Нулевой цикл 266
Чётность 267
Комбинаторика–1 270
Делимость и остатки 270
Принцип Дирихле 272
Графы 274
Неравенство треугольника 275
Игры 277
Индукция 280
Делимость-2. Сравнения и диофантовы уравнения 281
Комбинаторика-2 284
Инвариант 286
Графы-2 287
Геометрия 291
Системы счисления 294
Неравенства 295

Список литературы **297**

Посвящается 60*-летию*
Юношеской Математической Школы

Предисловие

Введение

Основное предназначение этой книги — помочь многочисленным энтузиастам, занимающимся внепрограммным (внешкольным или факультативным) математическим образованием школьников. Впрочем, школьники вполне могут пользоваться материалами настоящей книги и самостоятельно.

Что подтолкнуло нас в своё время на написание этой книги? Дело в том, что, хотя Ленинград и был колыбелью олимпиадного движения в Советском Союзе и остаётся до сих пор одним из лидеров в этой области, ни в одной из книг, посвящённых внешкольному образованию, не был отражён богатейший ленинградский опыт, накопленный за годы, прошедшие с той поры, когда в Ленинграде заработали первые математические кружки, предназначенные именно для учеников средней школы.

В первом издании (см. [24]) наше предисловие начиналось с такого абзаца:

> *В* 1977 *году в издательстве «Просвещение» была издана книга В. А. Гусева, А. И. Орлова и А. Л. Розенталя* [26], *посвящённая основным темам факультативного математического образования в* 6–8 *классах* (*нумерация в названии старая*[1]). *С тех пор, если не считать переиздания этой книги в* 1984 *году, не было издано массовым тиражом ни одной книги подобной направленности.*

Прошло почти тридцать лет, и ситуация качественно изменилась. За эти годы были напечатаны несколько очень интересных книг, посвящённых работе математических кружков. В первую очередь надо упомянуть замечательную книгу А. Г. Бураго [23], в которой много внимания уделено методической стороне вопроса. Издательство МЦНМО также издаёт отличную серию книжек «Школьные матема-

[1] В новой нумерации, введённой в 1989 году, это 7–9 классы.

тические кружки». Было опубликовано несколько весьма полезных новых сборников задач — среди них, например, книги В. О. Бугаенко [48] и А. В. Спивака [62, 63]. Появились новые сборники задач Ленинградских и Петербургских олимпиад ([47, 65]), равно как Всероссийских [45] и Московских олимпиад [64].

В конце 1990-х годов математические кружки стали постепенно обретать популярность и в других странах, до того не имевших развитой традиции в организации и ведении математических кружков — например, они появились в США, Канаде, Австралии, Великобритании, Индии, Испании, Колумбии, Бразилии. Это привело к тому, что появился заметный спрос на методологическую литературу по внешкольной математике. Наша книга была переведена и издана в США, Украине, Японии, Индии, Южной Корее, Бразилии, Малайзии и Испании. В одних только Соединённых Штатах Америки было напечатано более десятка самых разнообразных и очень интересных книг, обсуждающих не только задачи для ведения кружков, но и организацию и методику занятий со школьниками различного возраста и степени подготовки. Некоторые из этих книг упомянуты нами в библиографическом списке.

Ещё одно важное замечание, которое нужно сделать, состоит вот в чём. Хотя за эти тридцать лет изменилось очень многое, но данная книга всё-таки посвящена методике и истории именно ленинградских кружков, культуре ленинградского математического образования, сформировавшейся в 1960–1980-е годы. Поэтому мы решили не писать о том, как нынче обстоят дела в Санкт-Петербурге, а лишь обновить старое предисловие, добавив краткий исторический очерк, а также расширив параграф, посвящённый практике и методике ведения занятий кружков.

Краткий исторический очерк

Сейчас, увы, практически невозможно проследить истоки системы школьных математических кружков в Ленинграде, или ответить на вопросы «кто? где? когда?». Ясно, однако, что первые ласточки появились не позже са́мого начала 1930-х годов. Именно по инициативе преподавателей этих кружков примерно в 1933–34-х годах была организована «Научная станция для одарённых школьников», располагавшаяся в школе на набережной Фонтанки, неподалёку от Аничкова моста [1]. Первым руководителем этой «Научной станции» была

[1] Скорее всего, это была 23-я Единая Трудовая Школа, впоследствии ставшая 206-й школой Куйбышевского района Ленинграда.

Ольга Алоизиевна Белоглавек[1], принимавшая самое активное участие не только в ведении и подготовке занятий, но и в организации первой ленинградской математической олимпиады. Со стороны математического сообщества Ленинграда наиболее видную роль сыграл, безусловно, известный геометр Борис Николаевич Делоне, отец-основатель первой в СССР олимпиады школьников по математике (Ленинград, апрель 1934 года).

Преподавателями первых кружков и семинаров были студенты, аспиранты и молодые профессора математико-механического факультета (*матмеха*) Ленинградского Государственного Университета. Поначалу занятия кружков проводились, в основном, по лекционной системе, копируя университетские традиции. Однако довольно скоро они перешли на смешанную модель, которая оказалась заметно более эффективной для быстрого обучения и развития учеников. В рамках этой модели изучение различных областей элементарной математики включает в себя короткие тематические лекции, решение задач по теме лекции (и не только!), сопровождающееся подробным обсуждением их решений в рамках открытой дискуссии с участием всех кружковцев и преподавателей.

Здесь надо отметить, что заключительный тур Ленинградской городской математической олимпиады проводится как УСТНОЕ соревнование[2]. На традиционной письменной олимпиаде решения задач надо записывать, рискуя тем, что любая небольшая ошибка или неточность приведут к тому, что решение будет частично или полностью отвергнуто — у участника есть всего лишь одна попытка. У устной же олимпиады есть два технических преимущества — возможность исправить решение «на ходу», а также заметная экономия времени. Третий плюс — не столь заметный, но, пожалуй, не менее важный — это возможность пообщаться с профессионалом-математиком, лучше понять, что такое настоящее доказательство.

Одной из причин того, что олимпиада была проведена именно в устном «формате» — тут надо пояснить, что Ленинградская городская олимпиада на протяжении многих лет являлась **единственной** в мире (!) **устной** официальной математической олимпиадой — послужила именно традиция открытого устного обсуждения решений

[1] Чешка по национальности, в 1935 году О. А. Белоглавек была выслана из Ленинграда в северный Казахстан, а через несколько лет после войны арестована по ложному доносу; умерла в 1960-е годы, так и не вернувшись в Ленинград.

[2] Про то, как устроена устная олимпиада, см. [65].

Ленинградский Дворец Пионеров, вид со стороны Аничкова моста

задач на занятиях кружков. С другой стороны, наличие большого количества компетентных энтузиастов-математиков (студентов, аспирантов и преподавателей) сделало возможным качественное проведение устной олимпиады.

Однако вернёмся к кружкам. Постепенно внешкольная математика становилась всё более популярной (безусловно, сыграл свою роль и соревновательный аспект) и это привело к тому, что всё больше и больше школьников приходили в существовавшие кружки. В результате, в 1937 году возникла вполне официальная структура математических кружков только что созданного Ленинградского Дворца Пионеров (ЛДП), в которую влилась уже упомянутая выше «Научная станция».

Эти и другие городские кружки вели многочисленные энтузиасты, работавшие или получившие образование на матмехе. В их число до войны входили М. А. Вержбинский, Г. Е. Цветков, М. К. Гавурин, Д. И. Фукс-Рабинович, С. П. Оловянишников, М. А. Явец [1]. В первые послевоенные годы кружки вели З. И. Боревич, В. А. Залгаллер, Г. В. Епифанов, А. С. Соколин.

В дополнение к кружкам был создан неформальный лекторий для школьников старших классов, в рамках которого ленинградские профессора читали лекции по различным направлениям не только

[1] В будущем знаменитый переводчик Михаил Донской.

элементарной, но и вполне серьёзной математики. Список известных математиков, которые принимали в этом участие, весьма широк: Н. М. Гюнтер, Я. С. Безикович, В. И. Смирнов, Г. М. Фихтенгольц, О. К. Житомирский, Р. О. Кузьмин, В. А. Кречмар, В. А. Тартаковский, А. Г. Пинскер, И. П. Натансон, Д. К. Фаддеев, С. Г. Михлин, А. Д. Александров, Л. В. Канторович, Ю. В. Линник, С. В. Валландер, В. А. Рохлин, Н. А. Шанин, В. П. Хавин, Б. А. Венков, Г. С. Цейтин. И это только в первые тридцать лет существования лектория.

Не подлежит сомнению, что зародившаяся система внешкольного образования — а в неё, помимо математических кружков и упомянутых выше лекций, входили и школьные факультативы, и городская математическая олимпиада — сыграла огромную роль в становлении математического образования в Ленинграде и окружающих регионах.

Затем, примерно в 1950–1960-е годы, система существенно расширяется, и во Дворце Пионеров уже одновременно функционируют несколько кружков. Их ведут Г. В. Епифанов, И. Я. Бакельман, Е. Н. Сокирянская, А. А. Зингер, М. З. Соломяк, Ю. Д. Бураго, Н. М. Митрофанова, Н. А. Суслина, О. Н. Бондарева, Е. М. Гольдберг, А. В. Яковлев, Б. Б. Лурье, В. В. Жук, Л. А. Петросян.

Также в 1950-х годах, в дополнение к Дворцу Пионеров, появляются многочисленные кружки, работающие при математико-механическом факультете ЛГУ. Затем в 1960 году была создана Юношеская Математическая Школа (ЮМШ), которая объединила матмеховские кружки в единую структуру. ЮМШ облегчала создание и организацию кружков, а также предоставляла преподавателям материалы для проведения занятий, не говоря уже о помощи в преодолении определённых бюрократических барьеров. Инициаторами создания Юношеской Математической Школы была группа молодых студентов и аспирантов матмеха во главе с М. И. Башмаковым, которым оказали серьёзную поддержку профессора ЛГУ А. А. Никитин, Д. К. Фаддеев, К. Я. Кондратьев и С. Г. Михлин.

Надо сказать, что в те годы популярность математических кружков среди молодых математиков была такова, что некоторые преподаватели даже вели кружки в обеих «конкурирующих» структурах. Среди энтузиастов, работавших со школьниками в те годы, нужно назвать М. И. Башмакова, И. Я. Веребейчика, М. Л. Громова, Ю. И. Ионина, В. С. Итенберга, Р. В. Пейсахова, А. И. Плоткина, Ю. А. Давыдова, В. П. Одинца, М. Я. Розинского, М. Л. Гольдина, Б. А. Пламеневского, Н. К. Никольского, С. М. Белинского, С. А. Виноградова, В. П. Оревкова, А. П. Осколкова, А. В. Скитовича, С. Е. Козлова, С. С. Валландера,

Здание «старого» матмеха на 10-й линии В.О.

А. О. Слисенко, Ю. В. Матиясевича, И. М. Денискину, И. Б. Френкеля, Б. А. Лифшица.

Огромную роль сыграло создание в начале 1960-х годов системы физико-математических школ — именно «большая тройка», состоявшая из школ № 30, № 45 и № 239, собрала лучших учителей и школьников, что безусловно позволило повысить качество преподавания для самых способных юных математиков и физиков Ленинграда. В последовавшие годы всё больше и больше участников кружков становились учениками этих физматшкол — возникло своеобразное симбиотическое сосуществование этих двух, заметно отличавшихся друг от друга, систем.

Количество математических кружков в Ленинграде на протяжении следующего десятилетия было столь велико, что назвать всех преподавателей тех лет просто невозможно. Поэтому мы упомянем лишь некоторых (в дополнение к предыдущему списку). Это А. Л. Лихтарников, В. П. Федотов, В. В. Некруткин, В. Я. Гершкович, И. Е. Молочников, И. С. Рубанов, О. А. Иванов, О. Я. Виро, Т. А. Братусь, А. Д. Яценко, С. В. Фомин, М. Н. Гусаров.

Занятие кружка ЮМШ на старом матмехе, 1975 год

Примерно в 1977–78-х годах начался период постепенного смещения центра тяжести кружкового образования. В основном, это было связано с заметным усилением влияния кружков Дворца Пионеров, которыми в это время руководил С. Е. Рукшин. Одной из черт этих кружков была ориентация на спортивную (олимпиадную) сторону внешкольного математического образования — нужно отметить, что, начиная со второй половины 1970-х годов, многие победители Ленинградской городской олимпиады прошли через кружки Дворца Пионеров. Примерно в то же время началось и некоторое ослабление структуры ЮМШ, не в последнюю очередь обусловленное переездом матмеха в Старый Петергоф.

Другим серьёзным (и весьма негативным) фактором стало разрушение большой тройки физматшкол. В 1976 году 30-я школа была слита с 38-й школой и переведена в отдалённый микрорайон Васильевского острова, а через пять лет после этого, вслед за матмехом, в Петергоф была буквально «сослана» и ФМШ № 45.

Затем число кружков понемногу стало уменьшаться, и, кроме системы кружков ЛДП, ко второй половине 1980-х годов в Ленинграде ежегодно проводили свои занятия не более десяти-пятнадцати кружков.

Во Дворце Пионеров вместе с С. Е. Рукшиным преподавали также М. Ю. Филина, А. С. Голованов, Г. Я. Перельман, А. В. Богомольная,

Педагогический институт имени Герцена

Е. В. Абакумов, Ф. Л. Назаров, Е. С. Дубцов, Л. Д. Парнес, С. К. Смирнов, М. Я. Пратусевич, М. М. Рогинская. На протяжении ряда лет кружки Юношеской Математической Школы при ЛГУ тогда вели С. А. Генкин, В. Е. Козырев, И. А. Панин, А. Л. Смирнов, Н. М. Мясникова, А. А. Боричев, И. А. Чёрная, Д. Ю. Бураго, Д. В. Фомин, И. В. Итенберг, А. Л. Кириченко, К. П. Кохась, И. Б. Жуков, А. Ю. Бураго, А. Г. Фролова, Е. Е. Доманицкая, Е. Б. Богута, И. А. Биндер.

Стоит упомянуть, что занятия многих из этих кружков проходили на территории Ленинградского Государственного Педагогического Института имени А. И. Герцена — уж очень удобно он был расположен, самый центр города, совсем недалеко от станции метро «Невский проспект». Помимо этого, обосноваться там кружкам ЮМШ помогали работавшие в ЛГПИ математики А. Л. Вернер, Н. М. Матвеев, А. И. Плоткин.

* * *

Благодаря многочисленным энтузиастам и помощи преподавателей и профессоров ЛГУ, к 1960-м годам в Ленинграде была постепенно создана широкая сеть внеклассного математического образования, охватывавшая практически весь многомиллионный город. Как мы уже

говорили, важнейшей частью этой структуры являлись многочисленные математические кружки. Некоторые из них делали упор на подготовку к математическим соревнованиям, другие — на то, чтобы пробудить и поддержать интерес школьников к математике, третьи — на поступление в ВУЗы [1] (особенно этим «грешили» школьные факультативы). Лучшие кружки города, конечно же, пытались (и зачастую им это удавалось) делать и то и другое, а иногда немного и третье.

В эту сеть входили не только математические кружки. Многие десятки или даже сотни заинтересованных или, по крайней мере, проинформированных, учителей математики, инструкторы районных методических кабинетов, многоуровневая городская олимпиада, помощь и участие ленинградских математиков — всё это сыграло свою роль и дало плоды. Результатом этой длительной и упорной работы тысяч людей стало то, что любой школьник Ленинграда, заинтересованный в изучении математики, в получении новых знаний, мог сравнительно легко найти школьный факультатив, районный или городской кружок нужного уровня. Популяризация внешкольного математического образования была также поднята на весьма высокий уровень — не только учителя, но и родители знали о существовании этой системы.

Раз уж мы заговорили о популяризации математики, то здесь совершенно необходимо напомнить о той огромной роли, которую сыграл в 1970–80-е годы знаменитый физико-математический журнал для школьников «Квант». Номера этого замечательного ежемесячного издания были практически в каждой школьной библиотеке и почти в каждой семье технической интеллигенции с детьми школьного возраста. Тираж журнала доходил до фантастического по нынешним временам количества в 400000 экземпляров.

В Ленинграде заинтересовать школьников математикой помогала также газета «Ленинские Искры», на страницах которой с 1966 года усилиями В. М. Розентуллера проводился так называемый заочный математический турнир. В 1974 году эта традиция прервалась, но опять была возрождена в 1978 году в рамках рубрики «Школьная Академия Наук», статьи для которой под весёлым псевдонимом *Старик Конгруэнтыч* писал студент матмеха М. А. Чеповецкий. В этом турнире могли принимать участие и самые маленькие школьники (хотя формально он проводился для 3–8 классов, но иногда среди участников

[1] *Высшие учебные заведения*, собирательное название того времени для организаций высшего образования.

Первый выпуск Конгруэнтыча

оказывались даже первоклассники). Многие будущие учёные впервые познакомились с нестандартной математикой на примере задач математического турнира Конгруэнтыча.

Понятно, что вся эта внушительная структура возникла не сразу. Первые кружки в основном предназначались только для школьников старших (8–10) классов. По мере накопления методического и тематического материала стало ясно, что имеет смысл создавать кружки для младшеклассников, что и произошло в конце 1950-х – начале 1960-х годов.

Кружков и преподавателей в некоторый момент стало так много, что стала очевидной необходимость наладить хотя бы самое элементарное обучение самих кружководов; некоторым преподавателям (особенно молодым) не доставало методического опыта. Параллельно возникла острая нехватка конкретного тематического материала. С целью как-то решить эти проблемы проводились лекции для преподавателей, печатались небольшие самодельные сборники задач по многочисленным темам элементарной математики с упором на нестандартные, необычные задачи и способы их решения.

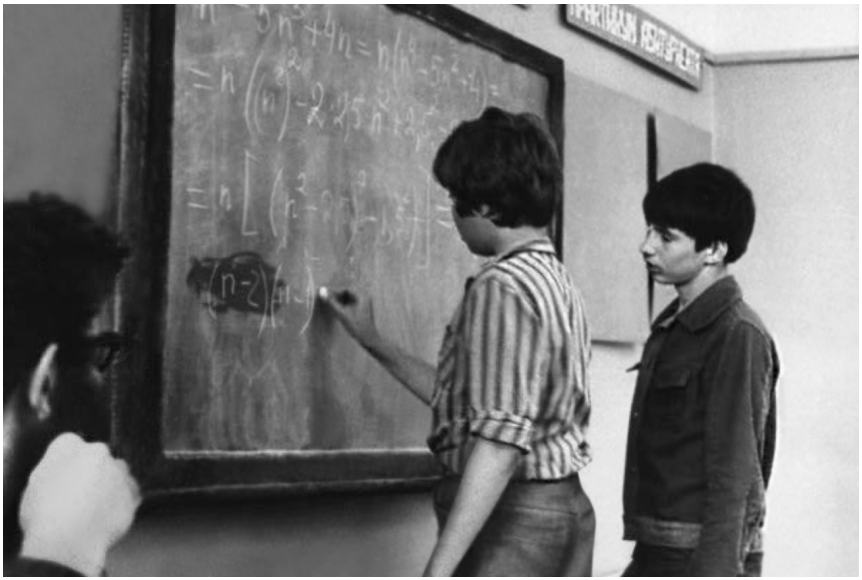
Всесоюзная конференция по работе со школьниками (1974)

Поскольку это, конечно же, не было проблемой местного значения, в 1974 году в Ленинграде была даже проведена Всесоюзная конференция по работе математических кружков и семинаров, организованная, в основном, усилиями А. Л. Лихтарникова, И. С. Рубанова и А. Д. Яценко, при поддержке деканата матмеха ЛГУ.

Немного позже, в конце 1970-х годов, по инициативе О. Я. Виро некоторое время функционировал семинар по внешкольному математическому образованию, ориентированный на преподавание в кружках.

Надо сказать, что к 1970–1980-м годам охват упомянутой выше сети был настолько широк, что практически все ленинградские математики моложе определённого возраста (скажем, те, кто родился после Великой Отечественной войны) прошли через математические кружки, олимпиады или и то и другое.

Традиция математических кружков поощряла свободное общение и распространение знаний — поэтому очень многие выпускники кружков организовывали свои собственные кружки, или присоединялись (в качестве преподавателей) к уже существовавшим кружкам. Каждый из нас мог бы привести пример известного математика X, который учился в ленинградском кружке у известного математика Y, который, в свою очередь, учился в ленинградском кружке у известного математика Z, который… и т. д.



Матбой в ЛМШ–1979

Ещё одна важная часть системы внешкольного математического образования была связана с работой ленинградских энтузиастов за пределами Ленинграда.

Уже в 1960-е годы несколько преподавателей ЮМШ организовали в пригородах Ленинграда летние математические лагеря. В них принимали участие как кружковцы-ленинградцы, так и местные ребята из школ одного из районов Ленинградской области. Затем в 1970 году в посёлке Сиверский была проведена первая Летняя Математическая Школа (ЛМШ) с набором школьников со всей Ленинградской области. Приехали также несколько школьников из Архангельской, Новгородской и Вологодской областей (по рекомендации местных отделов народного образования). Директором первой ЛМШ стал В. П. Трегубов.

В дальнейшем эти школы проводились практически каждый год в одном из многочисленных городков или посёлков Ленобласти вплоть до конца 1980-х — в разные годы ими руководили преподаватели университета С. В. Востоков, С. Е. Козлов, О. А. Иванов, А. П. Емельянов, А. А. Семёнов, И. О. Калинин и Н. А. Карпенко, а роль преподавателей и воспитателей играли студенты и выпускники матмеха. Каждая школа длилась примерно четыре недели (чаще всего, в июле), ей предшествовала многомесячная кампания по рассылке приглашений и до-

машних заданий по сотням школ Ленинградской области и «ближнего» Северо-Запада. Заявлений на участие в ЛМШ было обычно гораздо больше, чем мест — поэтому приходилось проводить отбор, главным образом, по результатам вступительных работ и по рекомендациям местных учителей.

В каких только местах не проводились эти летние школы — за многие годы шумную толпу школьников-математиков принимали на лето в Выборге и Луге, в Кирилловском и Громово, в Сиверском и Светогорске, в Шалово и Низино.

Стоит также упомянуть о том, что были и другие летние математические лагеря. Время от времени подобные летние сборы проводились для своих учеников обеими структурами ленинградских кружков. В Юношеской Математической Школе эти мероприятия носили эпизодический характер, а вот кружки Дворца Пионеров в 1980-х годах поставили такие лагеря на более серьёзную, ежегодную основу.

* * *

Другая замечательная часть ленинградской системы внешкольного образования была создана в 1966 году усилиями нескольких педагогов-новаторов на базе физико-математической школы-интерната № 45. Речь идёт о Северо-Западной Заочной Математической Школе. Идея была позаимствована у Всероссийской Заочной Школы, основанной в 1964 году в Москве выдающимся математиком И. М. Гельфандом.

Заочная математическая школа представляла собой, по сути дела, нечто вроде системы заочных кружков, в которых учителя и ученики взаимодействовали не напрямую, а через серию рассылавшихся из единого центра образовательных тематических материалов и письменных заданий.

Первым директором Северо-Западной ЗМШ стал преподаватель 45-го интерната В. А. Алейнов, а в 1980–1990-е годы работой школы руководил В. М. Гольховой. Заочная школа работала со школьниками 8–11 классов Северо-Западного региона России, и её основная цель состояла в расширении аудитории внешкольного образования и облегчении доступа способных школьников к качественным факультативным материалам по математике. За первые тридцать лет её существования через С-З ЗМШ прошли десятки тысяч ребят, заинтересовавшихся точными науками; многие из них впоследствии поступили в университеты и другие высшие учебные заведения по математической или естественнонаучной специальности.

На наш взгляд, ни время ни место возникновения заочной школы не были случайны. Именно в начале 1960-х годов, вскоре после создания 45-го интерната при ЛГУ, по инициативе группы преподавателей было решено послать первые группы энтузиастов-«исследователей» в отдельные районы Ленинградской области. Дальше — больше, и вскоре аналогичные математические экспедиции стали открывать другие «белые пятна» на карте Северо-Запада.

В разные годы учениками заочной школы были юноши и девушки из многочисленных регионов, таких как Архангельская, Псковская, Новгородская, Вологодская и Мурманская области, а также Белоруссия, Литва, Эстония, Коми и Карелия. Основная идея состояла в поиске увлечённых учителей и школьников, в постепенном распространении упомянутой выше «математической сети» на прилежащие к Ленинграду регионы. Не только интернат, но и университет были заинтересованы в том, чтобы школьники Северо-Запада присоединились к уже работавшей системе, и чтобы математическое образование высокого уровня было доступно умным ребятам, даже если они жили в небольших городках и посёлках.

* * *

Конечно же, очень трудно, практически невозможно перечислить всех энтузиастов, внёсших свой вклад в историю математических кружков и внеклассного математического просвещения в Ленинграде. Поэтому в этом очерке отмечены лишь основные вехи, и названы далеко не все, кто достоин упоминания, — не в силу личных пристрастий авторов, но потому, что многие имена уже забыты, а некоторые по случайности не попали в круг нашего зрения.

Как готовить и проводить занятия кружка

Эта книга была написана для того, чтобы послужить путеводителем для школьников «младших» (5–8) классов и их преподавателей.

Несмотря на стилистическое разнообразие текста, методологически он един. В нём представлены, как нам кажется, все основные темы занятий математического кружка в первые два года обучения. Главной целью авторов было облегчить преподавателям подготовку и проведение занятий. Мы хотели рассказать о математических идеях, на которые нужно обратить внимание школьников, и показать, как это можно сделать.

* * *

У математического кружка младших классов — несколько важных целей. Одна из них — инициировать способных ребят, помочь им почувствовать красоту математических рассуждений. Другая — развитие математической культуры, попытка научить участников кружка понимать, что значит решить задачу, чем формальное доказательство отличается от «размахивания руками». Может быть, не все с этим согласятся, но авторы считают, что кружки младших классов намного важнее кружков старших классов. Если они добились своей цели, то «инициированные» школьники могут продолжить получение систематического математического образования в старших классах в хорошей математической школе. При отсутствии такой школы альтернативой может послужить аналогичный кружок для школьников старших классов, или же самостоятельное математическое образование под руководством квалифицированного учителя (или другого старшего товарища-энтузиаста); возможно также и участие в одной из заочных математических школ, самостоятельно или в группе типа «Коллективный ученик».

Конечно, к занятиям кружка нужно скрупулёзно готовиться. Необходимо досконально знать и понимать объясняемую тему (и многое вокруг неё), нужно продумать чёткий план занятия, последовательность изложения материала, иметь достаточное количество задач. В то же время мы не рекомендуем заучивать материал занятия наизусть — постарайтесь создать впечатление, что все идеи рождаются здесь и сейчас. Преподаватель должен быть готов к вопросам детей, ему нужно быстро реагировать на возникающие препятствия, быть гибким в процессе занятия. Этого компромисса между основательной подготовкой и естественностью достичь трудно, но если это удаётся, получается замечательный результат. Нам кажется, что лучшие занятия, которые нам удавались, являлись такими тщательно подготовленными импровизациями.

Конечно, кружки для младших классов должны проводиться в форме живого, непосредственного общения школьников и преподавателей. Но нужно иметь в виду, что ребята, приходящие на занятия кружка, обладают разными способностями и особенностями. Некоторые соображают очень быстро, а другим требуется некоторое время для того, чтобы осознать свежую идею. Для синхронизации необходимо предусмотреть в процессе занятия моменты для самостоятельной работы, в процессе которой можно индивидуально пообщаться с участниками кружка и убедиться в том, что они понимают материал.

Нужно стремиться к тому, чтобы каждый участник кружка справился с некоторым минимальным заданием, но для более сильных школьников надо иметь про запас несколько трудных задач.

В любом случае, решения большинства задач должны подробно обсуждаться у доски. Очень полезно, чтобы свои решения пытались рассказать разные участники кружка. Важно создать атмосферу, в которой дети не боялись бы это делать. Если рассказываемое решение неверно или неполно, нужно спокойно объяснить, где ошибка или «дырка», и предложить автору решения и аудитории попытаться его исправить. Важно добиться того, чтобы рассказывающий понял ошибку, но при этом не чувствовал дискомфорта или обиды. После обсуждения преподаватель может повторить решение, опустив всё лишнее и правильно расставив акценты.

Нельзя переоценить такой важнейший фактор как общение ученика с преподавателем один-на-один. Во время этой дискуссии преподаватель может почувствовать трудности, испытываемые конкретным учеником и помочь ему преодолеть их. Нужно стараться максимизировать время такого общения.

Очень важный приём при представлении новой идеи (который авторы широко используют в основном корпусе этой книги) — начать с интересной задачи, для решения которой необходима эта идея, и дать школьникам возможность подумать над ней. Возможно, кто-то решит эту задачу, а кто-то нет. Те, кто решит, получат дополнительное эстетическое удовольствие, когда преподаватель выделит новую концепцию и объяснит, как она обобщается на решение большого класса задач. А те, кто не решит, гораздо лучше поймут, как именно новый подход позволяет преодолеть конкретные трудности, с которыми они столкнулись в процессе решения.

По окончании каждого занятия полезно проанализировать его. Прошло ли оно так, как было задумано? Были ли поняты основные идеи? Если после занятия кружка осталось чувство неудовлетворённости, надо попытаться понять, в какой момент была допущена ошибка. И наоборот, в какие моменты кружковцы и преподаватель были настроены на одну волну. Такой анализ очень поможет в проведении следующих занятий.

* * *

Хочется ещё раз подчеркнуть, что подготовка и проведение занятий — творческий процесс. Поэтому было бы неправильным слепо выполнять наши рекомендации. Однако мы надеемся, что вдумчивая

работа над текстом будет полезна для большинства преподавателей. Представляется естественным такое использование материалов книги: при разработке темы преподаватель изучает соответствующую главу и после этого приступает к подготовке занятия. Конечно же, необходимо вносить корректировку, связанную с уровнем кружка (факультатива). В качестве дополнительных источников задач мы советуем воспользоваться книгами [13, 18, 25, 46–48, 50, 57, 62, 63, 65].

Мы считаем неправильным заниматься с младшеклассниками одной темой в течение продолжительного промежутка времени. Даже в рамках одного занятия полезно иногда сменить направление деятельности. При этом необходимо постоянно возвращаться к пройденному. Это можно делать, предлагая задачи на данную тему в устных и письменных олимпиадах и других соревнованиях, о которых рассказано в приложении.

Мы рекомендуем почаще обращаться к нестандартным и «спортивным» формам проведения занятий, не забывая при этом подробно разбирать все предлагающиеся на них задачи. Необходимо также использовать на занятиях развлекательные и шуточные задачи. Их можно найти в книгах [5–7, 18–20, 40–44].

Структура текста и другие технические замечания

Книга состоит из предисловия, двух частей, приложения «Математические соревнования», раздела «Ответы, решения, указания» и списка литературы.

Часть первая («Первый год обучения») начинается с «Нулевого цикла», который состоит из задач тестового характера, предназначенных в основном для учеников 5–6 классов. Они почти не имеют математического содержания, а направлены лишь на выявление логико-математических способностей. Весь последующий текст первой части разбит на восемь глав, первые семь из которых — тематические; восьмая же («Задачник первого года») представляет собой подборку задач по самым разным темам.

Часть вторая («Второй год обучения») состоит из девяти глав; некоторые из них продолжают тематику первой части (как, например, главы «Графы–2», «Комбинаторика–2»). В других главах представлены материалы, которые были сочтены нами слишком сложными для первого года — «Инвариант», «Индукция», «Неравенства». Завершает эту часть «Задачник второго года».

В приложении «Математические соревнования» рассказывается о пяти основных видах математических соревнований, которые можно проводить на занятиях кружка или использовать для организации состязаний между различными кружками и даже школами.

- Те советы, которые предназначены исключительно преподавателям, выделены при помощи примечаний «*Для преподавателей*».
- Встречающиеся изредка в тексте «*Методические замечания*» содержат в основном методологический материал. В них, на примере конкретных задач, обсуждаются общие приёмы и подходы к решению. При этом подчёркиваются основные этапы рассуждения, равно как и способы распознавания и классификации задач по стандартным темам и идеям решения.
- Наиболее трудные задачи в тексте помечены звёздочкой.
- К большинству задач в разделе «Ответы, решения, указания» приведён какой-либо комментарий: полное решение задачи или лишь подсказка. К вычислительным задачам обычно приводится лишь ответ. К задачам для самостоятельного решения не даны (это, в частности, относится к задачникам первого и второго годов обучения).
- Все ссылки даются на книги единого списка литературы, приведённого в конце книги. Наиболее рекомендуемые книги помечены символом #.

* * *

Если Вы, уважаемый читатель, хотите сообщить авторам своё мнение о книге или высказать какие-либо замечания, — напишите нам по адресу <spbmathcircles@gmail.com>.

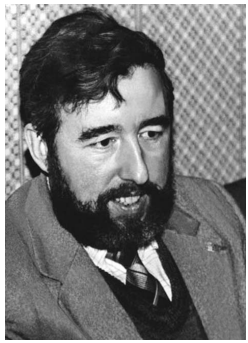
Спасибо!

Авторы с глубокой благодарностью хотели бы вспомнить тех, кто в 1960–1970-е годы сделал столь много для укрепления и развития описанного нами выше содружества. Мы понимаем, что здесь невозможно перечислить всех, кто принял в этом посильное участие — поэтому, пользуясь авторской прерогативой, мы хотели бы выделить тех, чей вклад в уникальную ленинградскую культуру внешкольного математического образования оказался особо ценен и важен именно для нас.

Марк Иванович Башмаков — человек, который сыграл громадную роль в создании 45-го физ-мат. интерната при ЛГУ и Юношеской Математической Школы, просветитель с большой буквы. Чего он только

М. И. Башмаков

И. Я. Веребейчик



Ю. И. Ионин

не успел в 1960–80-е годы — и интернат, и преподавание в кружках, и участие в жюри Ленинградской и Всесоюзной олимпиад по математике, и написание учебников, и популяризация математики в ПТУ, и многое другое.

Иосиф Яковлевич Веребейчик — замечательный энтузиаст и учитель, человек, посвятивший бóльшую часть своей жизни преподаванию в школах Ленинграда (в частности, все 1960-е годы он работал учителем математики в 30-й школе), воспитавший много первоклассных математиков, известный ещё и как изобретатель популярнейшего математического соревнования «матбой».

Юрий Иосифович Ионин — учитель «от Бога», великолепный методолог с глубочайшим пониманием своего предмета, многие годы преподававший математику в 45-м физико-математическом интернате при ЛГУ[1]. Он сыграл очень важную роль в становлении целой плеяды ленинградских математиков и физиков, многие из которых впоследствии считали большим везением встречу в юности с Юрием Иосифовичем.

* * *

Также мы обязательно хотим упомянуть здесь тех, кто уже предпринимал попытки создать нечто вроде антологии ленинградского математического кружка. Их книги [60] и [49], к сожалению, не дошли до широкого круга читателей, интересующихся факультативным математическим образованием.

[1] Кстати, все трое авторов — в разные годы — закончили именно эту замечательную школу.

В 1990 году первоначальный вариант первой части этой книги был выпущен в издательстве АПН СССР в виде сборника статей [27], в работе над которым принимал участие большой коллектив авторов. Мы хотим поблагодарить всех, чьими материалами мы пользовались при подготовке данной книги. Это Д. Г. Бенуа, И. Б. Жуков, О. А. Иванов, А. Л. Кириченко, К. П. Кохась, Н. Ю. Нецветаев, А. Г. Фролова.

Мы также выражаем свою искреннюю признательность И. С. Рубанову, чья статья «Индукция», написанная специально для готовившегося сборника «Математический кружок. Второй год обучения», с любезного разрешения её автора включена нами во вторую часть этой книги.

За существенное влияние, оказанное на формирование наших математических и педагогических вкусов и воззрений, за многолетнюю поддержку наших начинаний (да и не только за это!) — большое спасибо С. В. Фомину.

В настоящем издании мы использовали фотографии с общедоступных интернет-сайтов, посвящённых истории Ленинграда и истории Санкт-Петербургского математического общества, а также из личных архивов М. А. Чеповецкого и С. М. Финашина.

За комментарии, подсказки и напоминания при работе над данным предисловием мы очень признательны Е. В. Абакумову, А. Г. Бураго, Н. М. Мясниковой, Е. Н. Сокирянской, М. А. Чеповецкому и А. Д. Яценко.

Отдельная благодарность — А. Л. Кириченко и А. А. Николаевой за существенную помощь в подготовке рукописи первого издания этой книги [24], Марку Солу (Mark Saul) за перевод на английский язык и подготовку публикации американского издания [36], и Ю. Н. Торхову за неоценимую помощь в публикации данного издания.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава 1

Нулевой цикл

В этой главе собрано 25 простых задач. Для их решения не требуется ничего, кроме здравого смысла и простейших вычислительных навыков. Эти задачи можно использовать и на первых занятиях кружка для выявления логических и математических способностей учеников, и в дальнейшем в качестве развлекательных «вставок».

* * *

Задача 1. В стакане находятся бактерии. Через секунду каждая из бактерий делится пополам, затем каждая из получившихся бактерий через секунду делится пополам и т. д. Через минуту стакан полон. Через какое время стакан был заполнен наполовину?

Задача 2. Если Коля купит одну конфету, то у него останется одна копейка, а если он захочет купить две конфеты, то у него не хватит одной копейки. Сколько денег у Коли?

Задача 3. Аня, Ваня и Саня сели в автобус, не имея медных монет, однако сумели заплатить за проезд, потратив по пять копеек каждый [1]. Как им это удалось?

Задача 4. Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 365, а номер последней записывается теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?

[1] В Советском Союзе монеты достоинством 1, 2, 3 и 5 копеек назывались медными, а монеты достоинством в 10, 15, 20 и 50 копеек назывались серебряными.

Задача 5. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только весы без стрелки, отмерить 9 кг гвоздей?

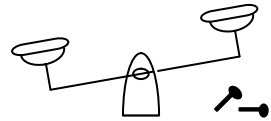


Рис. 1

Задача 6. Червяк ползёт по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а за каждую ночь сползает вниз на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 75 см?

Задача 7. В январе некоторого года было четыре пятницы и четыре понедельника. Каким днём недели было 20-е число этого месяца?

Задача 8. Из числа 123451234512345123451234512345 вычеркните 10 цифр так, чтобы оставшееся число было максимально возможным.

* * *

Задача 9. Петя говорит: позавчера мне ещё было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13. Может ли такое быть?

Задача 10. Петин кот перед дождём всегда чихает. Сегодня он чихнул. «Значит, будет дождь», — думает Петя. Правильно ли он рассуждает?

Задача 11. Учитель рисует на листе бумаги несколько кружков и спрашивает одного ученика: «Сколько здесь кружков?» «Семь», — отвечает ученик. «Правильно. Так сколько здесь кружков?» — опять спрашивает учитель другого ученика. «Пять», — отвечает тот. «Правильно», — снова говорит учитель. Так сколько же кружков он нарисовал на листе?

Задача 12. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, причём сам профессор в разговоре не участвует. Может ли такое быть?

Задача 13. По дороге цепочкой ползут три черепахи. «За мной ползут две черепахи», — говорит первая. «За мной ползёт одна черепаха, и передо мной ползёт одна черепаха», — говорит вторая. «Передо мной ползут две черепахи, и за мной ползёт одна черепаха», — говорит третья. Как такое может быть?

Задача 14. В поезде едут три мудреца. Внезапно поезд въезжает в тунель, и после того, как загорается свет, каждый из мудрецов видит, что лица его коллег испачканы сажей, влетевшей в окно вагона. Все трое начинают смеяться над своими испачкавшимися попутчиками, однако внезапно самый сообразительный мудрец догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как ему это удалось?

Задача 15. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и тщательно размешивают смесь. Затем три ложки смеси переливают обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

* * *

Задача 16. Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 магический квадрат, т. е. разместите их в таблице 3×3 так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы.

Задача 17. В примере на сложение цифры заменили буквами (причём одинаковые цифры — одинаковыми буквами, а разные цифры — разными буквами) и получили БУЛОК + БЫЛО = МНОГО. Сколько же было булок? Их количество есть максимальное возможное значение числа МНОГО.

Задача 18. Разведка звёздной империи ФИГ-45 перехватила секретное шифрованное сообщение враждебной планеты Медуза: ДУРАК + + УДАР = ДРАКА. Известно, что разные цифры зашифрованы разными буквами, а одинаковые цифры — одинаковыми буквами. Два электронных думателя взялись найти решение и получили два разных ответа. Может ли такое быть или один из них надо сдать в переплавку?

Задача 19. Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было выдать, не открывая кошельков?

* * *

Задача 20. Разрежьте уголок, изображённый на рис. 2, на четыре таких же уголка вдвое меньшего размера.

Задача 21. Из спичек сложена фигура, изображённая на рис. 3. Как переложить две спички, чтобы получилась фигура, образованная четырьмя квадратами с длиной стороны, равной длине спички?

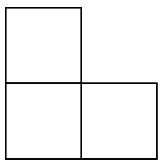


Рис. 2

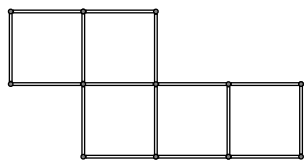


Рис. 3

Задача 22. Река шириной 4 метра делает поворот под прямым углом (рис. 4). Как переправиться через неё на другой берег, имея лишь две доски длиной 3 метра 90 сантиметров?

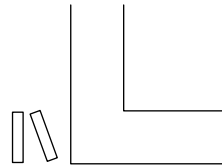


Рис. 4

Задача 23. Можно ли расположить 6 длинных круглых карандашей так, чтобы каждый из них касался любого другого?

Задача 24. При помощи ножниц вырежьте в тетрадном листе дырку, через которую мог бы пролезть слон!

Задача 25. 10 монет выложены так, как показано на рис. 5. Какое минимальное число монет нужно убрать, чтобы никакие три оставшиеся не лежали в вершинах равностороннего треугольника?

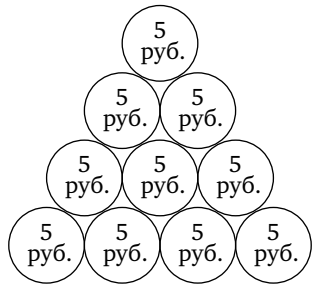


Рис. 5

Глава 2

Чётность

В этой главе не будет ничего трудного и непонятного. Речь пойдёт об одном несложном соображении — «чётности». Оно, несмотря на свою простоту, возникает при обсуждении самых разных вопросов и оказывается полезным при решении многих (в том числе и трудных) задач.

§ 1. Чередование

Задача 1. На плоскости расположено 11 шестерёнок, соединённых по цепочке (рис. 6). Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно?

Решение. Предположим, что первая шестерёнка вращается по часовой стрелке. Тогда вторая шестерёнка должна вращаться против часовой стрелки. Третья — снова по часовой, четвёртая — против и т. д. Ясно, что «нечётные» шестерёнки должны вращаться по часовой стрелке,

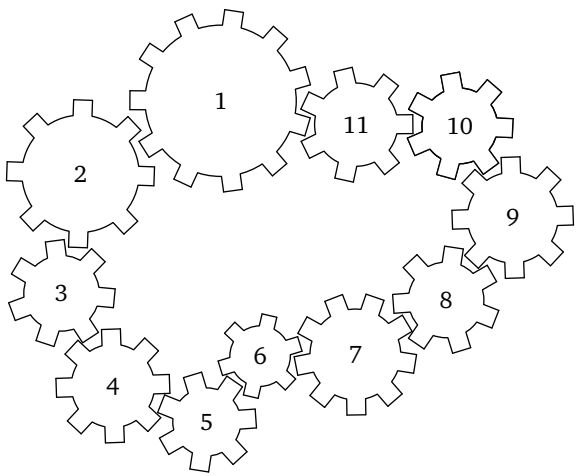


Рис. 6

а «чётные» — против. Но тогда 1-я и 11-я шестерёнки одновременно вращаются по часовой стрелке. Противоречие.

Главным при решении этой задачи оказалось то, что шестерёнки, вращающиеся по часовой стрелке и против, чередуются.

Нахождение чередующихся объектов — основное соображение при решении следующих задач.

Задача 2. Конь вышел с поля a1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Задача 3. Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Задача 4. Может ли прямая, которая не содержит вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все её звенья?

Задача 5. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьёт по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на своих исходных местах?

Задача 6. Катя и её друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребёнка — одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей пять. А сколько девочек?

Отметим дополнительное соображение, возникающее при решении последней задачи: в чередующейся замкнутой цепочке объектов одного вида (мальчиков) столько же, сколько и объектов другого вида (девочек).

§ 2. Разбиение на пары

Задача 7. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Решение. Если бы такое было возможно, то все звенья ломаной разбились бы на пары пересекающихся. Однако тогда число звеньев должно быть чётным.

Отметим ключевой момент рассуждения: если предметы можно разбить на пары, то их число чётно.

Вот ещё несколько подобных задач.

Задача 8. Можно ли доску размером 5×5 заполнить доминошками размером 1×2?

Задача 9. Дан осесимметричный выпуклый 101-угольник. Докажите, что ось симметрии проходит через одну из его вершин. Что можно сказать в случае 10-угольника?

Задача 10. Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

Задача 11. Из набора домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

Задача 12. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

Задача 13. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причём их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что хотя бы одна из шашек расположена на диагонали.

Методические замечания. При решении последней задачи часто возникают логические трудности. Это связано с тем, что на диагонали может оказаться не обязательно одна, но и любое нечётное число шашек. Для этой задачи наше утверждение о разбиении на пары можно сформулировать так: если из нечётного числа предметов образовано несколько пар, то по крайней мере один предмет остался без пары.

Задача 14. Допустим теперь, что расположение шашек в задаче 13 симметрично относительно обеих главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

Задача 15. В каждой клетке квадратной таблицы размером 25×25 записано одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, 25$. При этом, во-первых, в клетках, симметричных относительно главной диагонали, записаны равные числа и, во-вторых, ни в какой строке и ни в каком столбце нет двух равных чисел. Докажите, что числа на главной диагонали попарно различны.

§ 3. Чётность и нечётность

Задача 16. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти монет достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

Решение этой задачи основано на простом наблюдении: сумма чётного числа нечётных чисел чётна. Обобщение этого факта выглядит так: чётность суммы нескольких чисел зависит лишь от чётности числа нечётных слагаемых: если количество нечётных слагаемых (не)чётно, то и сумма (не)чётна.

Задача 17. Петя купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 1990?

Задача 18. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Задача 19. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

Задача 20. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «—» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

Замечание. Учтите, что отрицательные числа также бывают чётными и нечётными.

Задача 21. Кузнечик прыгает по прямой, причём в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см и т. д. Докажите, что после 1985 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

Задача 22. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 1984, 1985. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

§ 4. Разные задачи

В этом параграфе собраны более трудные задачи, решение которых, помимо чётности, использует, как правило, и некоторые дополнительные соображения.

Задача 23. Можно ли покрыть шахматную доску доминошками 1×2 так, чтобы свободными остались только клетки a1 и h8?

Задача 24. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

Задача 25. В народной дружине 100 человек, и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно один раз?

Задача 26. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

Задача 27. По кругу расставлено 9 чисел — 4 единицы и 5 нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними числами ставят ноль, если они различны, и единицу, если они равны; после этого старые числа стирают. Могут ли через некоторое время все числа стать одинаковыми?

Задача 28. 25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа — мальчики.

Задача 29. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.

Задача 30. Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через двух сразу!). Могут ли они после 1991 прыжка оказаться на прежних местах?

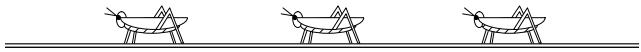


Рис. 7

Задача 31. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу от настоящих на 1 грамм. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить, фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

Задача 32. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, …, восьмёркой и девяткой было нечётное число цифр?

Для преподавателей. Как уже отмечалось, «чётность» — очень простая тема. Поэтому, возможно, не стоит посвящать ей отдельное занятие. Однако простота этой тематики позволяет решать задачи «на чётность» начиная с самых первых занятий кружка. Не забывайте при разборе решений обращать внимание школьников на соответствующие соображения.

Глава 3

Комбинаторика–1

Сколькими способами можно проехать из города А в город В? Сколько разных слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Сколько существует «симпатичных» четырёхзначных чисел?.. Сколько?.. Такие и некоторые другие, похожие на них вопросы будут обсуждаться в этой главе.

§ 1. Простой подсчёт

Начнём с нескольких простых задач.

Задача 1. В магазине «Всё для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение. Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трёх блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, число различных комплектов равно 15 ($15 = 5 \cdot 3$).

Задача 2. В магазине «Всё для чая» есть ещё 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Решение. Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 60 ($60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$).

Совершенно аналогично решается следующая задача.

Задача 3. В Стране Чудес есть три города: А, Б и В. Из города А в город Б ведёт 6 дорог, а из города Б в город В — 4 дороги (рис. 8). Сколькими способами можно проехать от А до В?

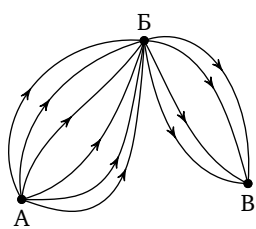


Рис. 8

Ответ. $24 = 6 \cdot 4$.

В решении задачи 4 появляется новое соображение.

Задача 4. В Стране Чудес построили ещё один город — Г и несколько новых дорог (рис. 9). Сколькими способами можно теперь добраться из города А в город В?

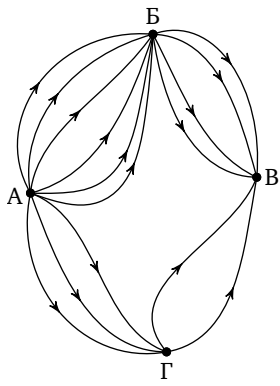


Рис. 9

Решение. Выделим два случая: путь проходит через город Б или через город Г. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных маршрутов: в первом — 24, во втором — 6. Складывая, получаем общее количество маршрутов: 30.

Выделение нескольких возможных случаев оказывается полезным и при решении задачи 5.

Задача 5. В магазине «Всё для чая» по-прежнему продаётся 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

Решение. Возможны три разных случая: первый — покупаются чашка с блюдцем, второй — чашка с ложкой, третий — блюдце и ложка. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом — 15, во втором — 20, в третьем — 12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов: 47.

Для преподавателей. Главная цель, которую должен преследовать преподаватель при решении и разборе этих задач, — понимание школьниками, в какой ситуации при подсчёте вариантов следует перемножать, а в какой — складывать. Конечно, задач должно быть много. Они могут быть взяты в конце главы (28–32), в книге [70] или придуманы самим преподавателем. Возможные сюжеты: различные покупки в магазине, разные схемы дорог, составление чисел из цифр (см. следующий цикл задач) и т. д.

Задача 6. Назовём натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечётные цифры. Сколько существует четырёхзначных «симпатичных» чисел?

Решение. Понятно, что однозначных «симпатичных» чисел ровно 5. К каждому однозначному «симпатичному» числу вторая нечётная цифра может быть дописана пятью различными способами. Таким образом, двузначных «симпатичных» чисел всего $5 \cdot 5 = 25$. Аналогично

трёхзначных «симпатичных» чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, а четырёхзначных — $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 54 = 625$.

Для преподавателей. В этой задаче ответ имеет вид m^n. К такому ответу приводят задачи, в которых на каждом из n мест может быть поставлен элемент из некоторого m-элементного множества. Эти задачи часто вызывают трудности у школьников, не всегда понимающих, какое из чисел является основанием степени, а какое — показателем.

Предложим ещё четыре подобные задачи.

Задача 7. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Ответ. 2^3.

Задача 8. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

Ответ. 2^4.

Задача 9. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спортпрогноз»? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча — победа одной из команд либо ничья; счёт роли не играет.)

Ответ. 3^{13}.

Задача 10. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трёх букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трёх- и четырёхбуквенных слов.

Ответ. $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$.

Перейдём к следующему циклу задач.

Задача 11. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

Эта задача отличается от предыдущих тем, что выбор капитана ограничивает круг претендентов на роль заместителя: капитан не может быть своим заместителем. Таким образом, выборы капитана и его заместителя не являются независимыми — такими, как, например, выборы чашки и блюдца в задаче 1.

Вот ещё четыре задачи на эту тему.

Задача 12. Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

Решение. Цвет для верхней полоски флага можно выбрать шестью разными способами. После этого для средней полоски флага остаётся пять возможных цветов, а затем для нижней полоски флага — четыре различных цвета. Таким образом, флаг можно сделать $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способами.

Задача 13. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьёт 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остаётся 49 полей, на которые можно поставить чёрную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

Задача 14. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Решение. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому необходимо разобрать три случая:

а) если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьёт 4 поля (включая то, на котором стоит) и остаётся 60 полей, на которые можно поставить чёрного короля;

б) если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей — 24), то он бьёт 6 полей и для чёрного короля остаётся 58 возможных полей;

в) если же белый король стоит не на краю доски (таких полей — 36), то он бьёт 9 полей и для чёрного короля остаётся 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов расстановки королей.

§ 2. Перестановки и кратный подсчёт

Займёмся теперь подсчётом числа способов, которыми можно расположить в ряд n предметов. Такие расположения называются перестановками и играют заметную роль в комбинаторике и алгебре. Но прежде необходимо сделать небольшое отступление.

Пусть n — натуральное число. Тогда $n!$ (читается «эн-факториал») — это произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Таким образом, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Методические замечания. Перед тем как обсуждать перестановки, необходимо как следует освоить понятие факториала и научиться обращаться с ним. Для этого могут быть полезны следующие упражнения.

Упражнение 1. Запишите в виде факториала: а) $10! \cdot 11$; б) $n! \cdot (n+1)$.

Упражнение 2. Вычислите: а) $\dfrac{100!}{98!}$; б) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$.

Следует иметь в виду, что для удобства написания некоторых комбинаторных тождеств принято считать $0!$ равным 1.

Вернёмся теперь к перестановкам.

Задача 15. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

Решение. Будем рассуждать точно так же, как при решении задач предыдущего цикла. На первое место можно поставить любую из трёх цифр, на второе — любую из двух оставшихся, а на третье — последнюю оставшуюся цифру. Таким образом, всего получается $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ чисел.

Задача 16. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, чёрный, синий и зелёный шарики?

Решение. На первое место можно положить любой из четырёх шариков, на второе — любой из трёх оставшихся, на третье — любой из двух оставшихся, а на четвёртое — последний оставшийся шарик. Итак, ответ: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.

Рассуждая так же, как при решении двух последних задач, легко доказать, что n разных предметов можно выложить в ряд

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

различными способами, т. е.

число перестановок из n элементов равно $n!$.

Для удобства формулировки задач следующего цикла введём соглашение. Словом будем называть любую конечную последовательность букв русского алфавита. Скажем, используя буквы А, Б, В ровно по одному разу, можно составить 6 слов: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА; используя же букву А дважды, а букву Б один раз — три слова: ААБ, АБА, БАА. В следующих пяти задачах необходимо выяснить, сколько различных слов можно получить, переставляя буквы того или иного слова.

Задача 17. «ВЕКТОР».

Решение. Так как все буквы слова различны, всего можно получить 6! слов.

Задача 18. «ЛИНИЯ».

Решение. В этом слове две буквы И, а все остальные буквы разные. Временно будем считать разными и буквы И, обозначив их через $И_1$ и $И_2$. При этом предположении получится $5! = 120$ разных слов. Однако те слова, которые получаются друг из друга только перестановкой букв $И_1$ и $И_2$, на самом деле одинаковы. Таким образом, полученные 120 слов разбиваются на пары одинаковых. Поэтому разных слов всего $120 : 2 = 60$.

Задача 19. «ПАРАБОЛА».

Решение. Считая три буквы А этого слова различными ($А_1$, $А_2$, $А_3$), получим 8! разных слов. Однако слова, отличающиеся лишь перестановкой букв А, на самом деле одинаковы. Поскольку буквы $А_1$, $А_2$, $А_3$ можно переставлять 3! способами, все 8! слов разбиваются на группы по 3! одинаковых. Поэтому разных слов всего $\frac{8!}{3!}$.

Задача 20. «БИССЕКТРИСА».

Решение. В этом слове три буквы С и две буквы И. Считая все буквы различными, получаем 11! слов. Отождествляя слова, отличающиеся лишь перестановкой букв И, но не С, получаем $\frac{11!}{2!}$ различных слов. Отождествляя теперь слова, отличающиеся перестановкой букв С, получаем окончательный результат: $\frac{11!}{2! \cdot 3!}$.

Задача 21. «МАТЕМАТИКА».

Ответ. $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$.

Цикл задач про слова продемонстрировал одно содержательное комбинаторное соображение — идею кратного подсчёта. Вместо подсчёта числа интересующих нас объектов иногда бывает удобно пере-

считывать другие объекты, количество которых превосходит количество исходных в известное число раз.

Вот ещё четыре задачи, при решении которых используется этот приём.

Задача 22. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Решение. Каждая авиалиния соединяет два города. В качестве первого города можно взять любой из 20 городов (город A), а в качестве второго — любой из 19 оставшихся (город B). Перемножив эти числа, получаем $20 \cdot 19 = 380$. Однако при этом подсчёте каждая авиалиния учтена дважды (первый раз, когда в качестве первого города был выбран город A, а второго — город B, а второй раз — наоборот). Таким образом, число авиалиний равно $380 : 2 = 190$.

Хотелось бы отметить, что подобная задача обсуждается и в главе «Графы» при подсчёте числа рёбер графа.

Задача 23. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Решение. В качестве первого конца диагонали можно взять любую из n вершин, а в качестве второго — любую из $n-3$ вершин, отличных от выбранной и двух соседних с ней (рис. 10). При этом подсчёте каждая диагональ учитывается дважды.

Ответ. $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

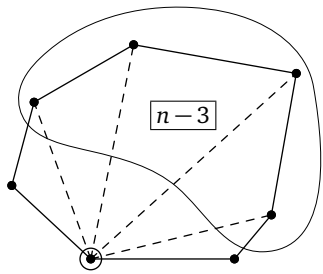


Рис. 10

Задача 24. Бусы — это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Решение. Представим себе на время, что бусы нельзя поворачивать. Тогда их можно сделать 13! различными способами. Однако любое расположение бусин и 12 вариантов, получающихся из него поворотами, следует считать одним и тем же вариантом бус (рис. 11).

Ответ. $\dfrac{13!}{13} = 12!$.

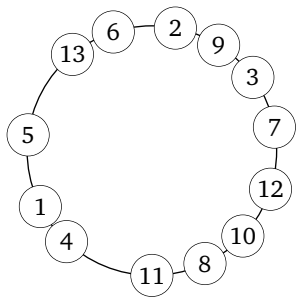


Рис. 11

Задача 25. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Решение. Перевороты сокращают количество бус в 2 раза.

Ответ. $12!/2$.

Следующая задача иллюстрирует ещё одно важное комбинаторное соображение.

Задача 26. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Решение. Вместо того чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определим количество шестизначных чисел, не обладающих нужным свойством. Так как это в точности те числа, в записи которых встречаются только нечётные цифры, их количество, очевидно, равно $5^6 = 15625$. Всего шестизначных чисел 900000. Поэтому количество шестизначных чисел, обладающих указанным свойством, равно $900000 - 15625 = 884375$.

Основным моментом при решении этой задачи был так называемый переход к дополнению: подсчёт «ненужных» вариантов вместо подсчёта «нужных». Вот ещё одна задача, при решении которой полезно использовать это соображение.

Задача 27. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

Ответ. $6^6 - 6!$.

Для преподавателей. В заключение хотелось бы отметить, что идее, объединяющей задачи каждого выделенного в главе цикла, естественно посвящать отдельное занятие. При этом необходимо всё время возвращаться к уже пройденному материалу. Поэтому мы приводим дополнительный список задач для самостоятельного решения. Кроме того, источниками задач могут быть книга [70] и фантазия преподавателя.

§ 3. Дополнительные задачи

Задача 28. В киоске «Союзпечать» продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

Задача 29. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «КРУЖОК»?

Задача 30. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 31. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Задача 32. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

Задача 33. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трёх курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

Задача 34. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

Задача 35. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

Задача 36. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Задача 37. На танцплощадке собрались N юношей и N девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

Задача 38. Чемпионат России по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий, если участвуют 18 шахматистов?

Задача 39. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску а) две ладьи; б) двух королей; в) двух слонов; г) двух коней; д) двух ферзей так, чтобы они не били друг друга?

Задача 40. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она даёт сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 41. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырёхместную?

Задача 42. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?

Задача 43. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трёх букв Б?

Задача 44. Сколько существует 10-значных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

Задача 45*. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

Задача 46. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?

Задача 47. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

Задача 48*. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых чётна?

Глава 4

Делимость и остатки

Для преподавателей. Эта тема является чрезвычайно важной, хотя, скорее всего (из-за большого количества теоретического материала), покажется вам довольно скучной. Отчасти это вызвано тем, что, ввиду невозможности полностью передать в тексте сам характер живого общения со школьниками, мы вынуждены ограничиваться лишь сухими рекомендациями и текстами задач. Постарайтесь внести в занятия элемент игры и развлечения (даже из такого «занудного» упражнения, как разложение на простые множители, можно устроить соревнование: «кто быстрее выполнит задание» или «кто быстрее найдёт самый большой простой делитель» и т. п.). Тщательно готовьте занятия по этой теме, не забывая о том, что делимость проходится и в школе (на это необходимо опираться).

§ 1. Простые и составные

Вы, конечно, хорошо знаете, что среди натуральных чисел есть простые и составные. Число является составным, если оно равно произведению двух меньших натуральных (например, $6 = 2 \cdot 3$). В противном случае число (если оно, кроме того, отлично от 1) называется простым. Единица не является ни простым, ни составным числом.

Простые числа являются своего рода «кирпичиками», из которых можно построить все остальные числа. В каком же смысле? Рассмотрим число 420. Оно, без сомнения, составное. Его можно разложить на множители, например, так: $420 = 42 \cdot 10$. Каждое из чисел 42 и 10 также составное: $42 = 6 \cdot 7$, $10 = 2 \cdot 5$. Поскольку $6 = 2 \cdot 3$, получаем, что $420 = 42 \cdot 10 = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Мы получили разложение нашего числа на простые сомножители (рис. 12).

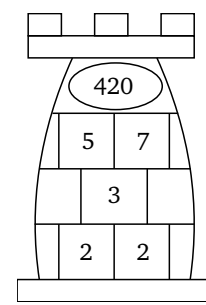


Рис. 12

Наверное, ни у кого не вызывает сомнения, что, действуя таким же образом, можно представить

в виде произведения простых чисел любое натуральное число (кроме 1) — надо раскладывать получающиеся сомножители в произведение меньших, пока это удаётся. А что, если попробовать разложить число 420 на множители по-другому? Например, начав так: $420 = 15 \cdot 28$. Вы, конечно, догадались, что в результате получится то же самое разложение (если в конце простые сомножители расположить в порядке возрастания).

Этот интуитивно очевидный, но совсем не просто доказываемый факт — каждое натуральное число, за исключением единицы, раскладывается в произведение простых сомножителей, причём единственным образом — называется *основной теоремой арифметики*.

Для преподавателей. Всё содержание этого параграфа тесно связано с основной теоремой арифметики.

Необходимо, чтобы ребята поняли, что свойства делимости практически полностью определяются разложением числа на простые множители. Достичь этого поможет обсуждение вопросов, подобных нижеследующим (их же можно использовать и для проверки понимания).

Контрольные вопросы

1. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 2?

Ответ. Да, так как 2 входит в разложение этого числа на простые множители.

2. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 5?

Ответ. Нет, потому что в разложении этого числа на простые множители нет простого числа 5.

3. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 8?

Ответ. Да, поскольку $8 = 2^3$, а в разложение данного числа на простые множители двойка входит 9 раз.

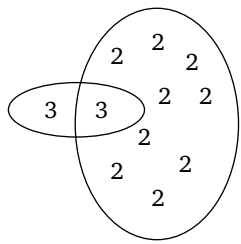


Рис. 13

4. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 9?

Ответ. Нет, так как в разложение данного числа на простые множители тройка входит лишь один раз, а в разложение числа 9 — дважды (рис. 13).

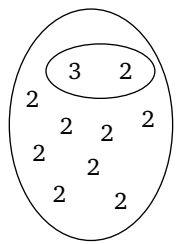


Рис. 14

5. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 6?

Ответ. Да, потому что $6 = 2 \cdot 3$, а 2 и 3 входят в разложение данного числа на простые множители (рис. 14).

6. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 3, то оно делится на 12?

Ответ. Да. В разложение на простые множители числа, делящегося на 4, двойка входит по крайней мере 2 раза. Поскольку число делится и на 3, в его разложение входит и тройка. Поэтому оно делится на 12.

7. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно делится на $24 = 4 \cdot 6$?

Ответ. Нет. Например, число 12. Дело в том, что если число делится на 4, то в его разложение на простые множители по крайней мере дважды входит число 2; из делимости числа на 6 следует, что в его разложении есть 2 и 3. Таким образом, заведомо в это разложение входят две (не три!) двойки и одна тройка, и можно утверждать лишь то, что число делится на 12.

8. Натуральное число A не делится на 3. Может ли на 3 делиться число $2A$?

Ответ. Нет, поскольку тройка не входит в разложение на простые множители числа $2A$.

9. Натуральное число A чётно. Верно ли, что $3A$ делится на 6?

Ответ. Да, так как 2 и 3 входят в разложение числа $3A$ на простые множители.

10. Натуральное число A таково, что $5A$ делится на 3. Верно ли, что A делится на 3?

Ответ. Да, потому что в разложение числа $5A$ на простые множители тройка входит, а в разложение числа 5 — нет.

11. Натуральное число A таково, что $15A$ делится на 6. Верно ли, что A делится на 6?

Ответ. Нет. Например, $A = 2$. Дело в том, что тройка, входящая в разложение числа 6, входит и в разложение числа 15. Поэтому можно утверждать лишь то, что в разложении числа A обязательно есть двойка.

Важное определение. Два числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, отличных от единицы.

Так, например, два разных простых числа, конечно, являются взаимно простыми.

Используя рассуждения, подобные тем, которые приведены в ответах на вопросы 6 и 10, можно доказать два следующих факта:

а) если некоторое число делится на два взаимно простых числа n и m, то оно делится и на их произведение nm;

б) если число pA делится на q, где p и q взаимно просты, то и A делится на q.

Для преподавателей. Обязательно разберите несколько примеров. Задачи, использующие понятие взаимной простоты, вы найдёте в конце параграфа.

Ещё два важных определения. 1. *Наибольшим общим делителем* (для краткости НОД) двух чисел называется наибольший из общих делителей этих чисел.

2. *Наименьшим общим кратным* (НОК) двух чисел называется наименьшее число, делящееся на каждое из них.

Так, например, $\text{НОД}(18, 24) = 6$, $\text{НОК}(18, 24) = 72$.

Эти определения дают возможность дополнить список контрольных вопросов ещё двумя.

12. Пусть $A = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$, $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$. Чему равен $\text{НОД}(A, B)$?

Ответ. $24 = 2^3 \cdot 3$. Это общая часть разложений.

13. Пусть $A = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7$, $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$. Чему равен $\text{НОК}(A, B)$?

Ответ. $420000000 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 7$. Это объединение разложений.

Для преподавателей. Настоятельная просьба — воспринимайте текст этого параграфа лишь как набросок сценария занятия. Более подробная разработка — задача преподавателя. В некоторых местах вам, возможно, придётся задавать однотипные вопросы — постарайтесь сделать это так, чтобы не наскучить школьникам. Поощряйте их попытки высказывать собственные гипотезы по поводу разбираемых задач и теорем.

Однако это занятие окажется быстро забытым, если впоследствии не будут регулярно появляться задачи, использующие обсуждавшиеся здесь соображения.

Список подобных задач приведён ниже. Кроме того, эти соображения используются и при решении задач следующих параграфов.

Задача 1. Пусть p и q — различные простые числа. Сколько делителей у числа а) pq; б) p^2q; в) p^2q^2; г) p^nq^m?

Задача 2. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

Указание. Среди этих трёх чисел есть хотя бы одно чётное число и одно число, делящееся на 3.

Задача 3. Докажите, что произведение любых пяти последовательных натуральных чисел делится а) на 30; б) на 120.

Задача 4. Пусть p — простое число. Сколько существует натуральных чисел а) меньших p и взаимно простых с ним; б) меньших p^2 и взаимно простых с ним?

Задача 5. Каково наименьшее натуральное n, для которого $n!$ делится на 990?

Задача 6. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

Задача 7. На сколько нулей оканчивается число 100!?

Задача 8. Докажите, что натуральное число, имеющее нечётное число делителей, — точный квадрат.

Задача 9. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нём все цифры на буквы, причём одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось АБ · ВГ = ДДЕЕ. Докажите, что он где-то ошибся.

Задача 10. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

Указание. Это число делится на 3, но не делится на 9.

Для преподавателей. На идею решения этой задачи следует обратить внимание школьников.

Задача 11*. Натуральные числа a и b таковы, что $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

Задача 12. Решите в натуральных числах уравнения а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $x^2 - y^2 = 303$.

Указание. Используйте равенство $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Задача 13. Решите в целых числах уравнение $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

Указание. Перенесите 3 в правую часть и разложите левую часть на множители.

Задача 14. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

§ 2. Остатки

Предположим, что вы подошли к автомату с газированной водой[1]. У вас в кармане 15-копеечная монета. К счастью, рядом находится чудесная разменная касса, выдающая трёхкопеечные монеты. Понятно, что в обмен на свою монету вы сможете получить пять трёхкопеечных. А если у вас была 20-копеечная монета? Тогда, конечно, вы получите 6 трёхкопеечных монет и две копейки сдачи. Запишем: $20 = 6 \cdot 3 + 2$. Это запись деления 20 на 3 с остатком.

Как же работает касса? Она отсчитывает трёхкопеечные монеты по одной до тех пор, пока сумма, которую ей осталось выплатить, не станет меньше 3. После этого она выдаёт сдачу — остаток. Ясно, что этим остатком может быть любое из трёх чисел: 0, 1, 2. Остаток равен нулю, если исходное число делится на 3 нацело.

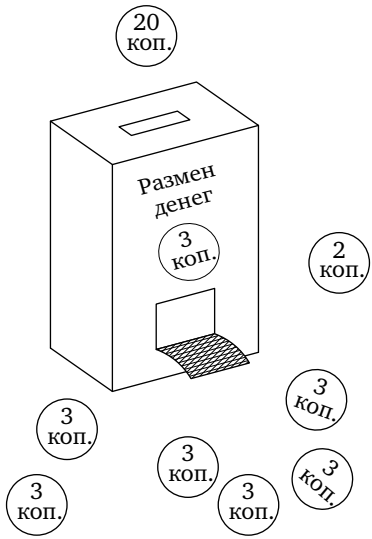


Рис. 15

Аналогично можно представить себе автомат, выдающий m-копеечные монеты и сдачу от 0 до $m-1$ копейки. Этот автомат осуществлял бы деление на m с остатком.

Дадим теперь аккуратное определение.

[1] Для того, чтобы автомат выдал вам стакан газировки, требовалось опустить в него одну трехкопеечную монету.

Разделить натуральное число N на натуральное число m с остатком означает представить N в виде $N = km + r$, где k, r — неотрицательные целые числа, и $r < m$. При этом число r, которое может принимать значения от 0 до $m-1$, называется остатком от деления N на m.

Обсудим теперь такую задачу: человек одновременно опустил в чудесную кассу 22 пятидесятикопеечные монеты и 44 десятикопеечные монеты. Какую сдачу он получит?

Эту задачу, конечно, решить очень легко. Достаточно найти остаток от деления числа $22 \cdot 50 + 44 \cdot 10$ на 3. Замечательно, однако, что для этого не обязательно вычислять выписанное выражение. Поступим так: заменим каждое из чисел на его остаток от деления на 3. Получим выражение $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1$. Это число равно 4 и даёт остаток 1 при делении на 3. Мы утверждаем, что остаток исходного выражения от деления на 3 также равен 1. Дело в том, что верны следующие утверждения.

1. Сумма любых двух натуральных чисел и сумма их остатков имеют одинаковые остатки при делении на 3.
2. Произведение любых двух натуральных чисел и произведение их остатков имеют одинаковые остатки при делении на 3.

Методические замечания. Формальное доказательство этих двух утверждений совсем несложно, хотя для большинства начинающих оно может оказаться технически перегруженным.

Докажем, например, второе утверждение. Пусть

$$N_1 = k_1 \cdot 3 + r_1, \quad N_2 = k_2 \cdot 3 + r_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &= (k_1 \cdot 3 + r_1)(k_2 \cdot 3 + r_2) = \\ &= k_1 k_2 \cdot 3^2 + k_1 r_2 \cdot 3 + k_2 r_1 \cdot 3 + r_1 r_2 = \\ &= 3(3k_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1) + r_1 r_2. \end{aligned}$$

Таким образом, при размене чудесной кассой $N_1 N_2$ копеек после выдачи $3k_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1$ трёхкопеечных монет останутся невыданными $r_1 r_2$ копеек. Поэтому ясно, что сдача от $N_1 N_2$ копеек равна сдаче от $r_1 r_2$ копеек.

Конечно, в утверждениях 1 и 2 тройка может быть заменена любым другим натуральным числом. В этом легко убедиться, проведя аналогичные рассуждения.

Для преподавателей. Высказанные обобщения утверждений 1 и 2 постоянно используются на протяжении этого параграфа. Поэтому необходимо научить школьников правильно применять эти утверждения при подсчёте остатков. Для этого нужно прорешать с ребятами некоторое количество (на ваше усмотрение) упражнений, аналогичных задаче 15, привлекая внимание учеников к применению этих утверждений в процессе решения.

Что касается доказательств утверждений 1 и 2, то мы не считаем обязательным их обсуждение на занятии.

Задача 15. Найдите остатки от деления а) $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ на 7; б) 9^{100} на 8.

Решение следующей задачи содержит очень важную идею.

Задача 16. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого натурального n.

Решение. Число n может давать при делении на 3 один из трёх остатков: 0, 1, 2. Рассмотрим три случая.

Если n даёт остаток 0, то и n^3, и $2n$ делятся на 3 и поэтому $n^3 + 2n$ также делится на 3.

Если n даёт остаток 1, то n^3 даёт остаток 1, $2n$ — остаток 2, а $1 + 2$ делится на 3.

Если n даёт остаток 2, то n^2 даёт остаток 1, n^3 — остаток 2, $2n$ — остаток 1, а $2 + 1$ делится на 3.

Требуемое доказано.

Для преподавателей. Ключевым моментом при решении этой задачи было сведение её к перебору возможных остатков от деления на некоторое число. На этот метод надо обратить внимание школьников. Необходимо, чтобы они поняли, что подобный перебор действительно является полным решением.

Данный метод очень часто применяется при решении различных задач. Постарайтесь научить ребят определять по внешнему виду задачи, полезен ли при её решении перебор остатков. Надеемся, что этой цели помогут достичь задачи из этого параграфа.

Задача 17. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

Задача 18. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

Задача 19. Докажите, что n^3+2 не делится на 9 ни при каком натуральном n.

Задача 20. Докажите, что n^3-n делится на 24 при любом нечётном n.

Подсказка. Докажите, что указанное число делится и на 3, и на 8.

Задача 21. а) Докажите, что p^2-1 делится на 24, если p — простое число и $p>3$.

б) Докажите, что p^2-q^2 делится на 24, если p и q — простые числа, бóльшие 3.

Задача 22. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Задача 23. Пусть a и b — натуральные числа, причём число a^2+b^2 делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

Задача 24. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6.

Задача 25. Три простых числа p, q и r, бóльшие 3, образуют арифметическую прогрессию:

$$p=p, \quad q=p+d, \quad r=p+2d.$$

Докажите, что d делится на 6.

Задача 26. Докажите, что сумма квадратов трёх натуральных чисел, уменьшенная на 7, не делится на 8.

Задача 27. Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых также делится на 9.

Подсказка. Разность двух чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 9, делится на 9.

Перейдём к следующему циклу задач.

Задача 28. Найдите последнюю цифру числа 1989^{1989}.

Решение. Заметим сначала, что последняя цифра числа 1989^{1989} совпадает с последней цифрой числа 9^{1989}. Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней числа 9: $9, 1, 9, 1, 9, \ldots$

Так как при нахождении последней цифры очередной степени числа 9 достаточно умножить на 9 лишь последнюю цифру предыдущей степени, ясно, что за 9 следует 1 ($9\cdot 9=81$), а за 1 — 9 ($1\cdot 9=9$).

Таким образом, нечётные степени девятки оканчиваются на 9. Поэтому последняя цифра числа 1989^{1989} — девятка.

Задача 29. Найдите последнюю цифру числа 2^{50}.

Решение. Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней двойки: $2, 4, 8, 6, 2, \ldots$ Мы видим, что 2^5 так же, как и 2^1, оканчивается на 2. Поскольку очередная цифра полностью определяется последней цифрой предыдущей степени, произойдёт «зацикливание»: 2^6 (как и 2^2) оканчивается на 4, 2^7 (как и 2^3) — на 8, 2^8 — на 6, 2^9 — на 2 и т. д. Поскольку длина цикла равна 4, последняя цифра числа 2^{50} определяется остатком от деления числа 50 на 4. Так как он равен 2, последняя цифра числа 2^{50} совпадает с последней цифрой числа 2^2, т. е. равна 4.

Задача 30. На какую цифру оканчивается число 777^{777}?

Задача 31. Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.

Подсказка. Выпишите остатки от деления на 3 нескольких начальных степеней двойки. Докажите, что и здесь происходит «зацикливание».

Задача 32. Найдите остаток от деления 3^{1989} на 7.

Задача 33. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

Подсказка. Вычислите остаток от деления этого числа на 7 и убедитесь, что он равен нулю.

Задача 34. Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7}.

В задачах 16–27 использовалась идея перебора остатков от деления на некоторое число, причём это число легко узнавалось по условию. Задачи цикла, к которому мы переходим, значительно труднее, поскольку они требуют угадывания числа, остатки от деления на которое необходимо перебирать. Это требует определённого умения и, несмотря на наличие некоторых стандартных приёмов, может считаться настоящим искусством.

Для преподавателей. В качестве упражнений, закрепляющих навыки подобного рода, можно предложить составление учениками таблиц умножения остатков от деления на «наиболее употребительные числа» — 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13 и т. п. — или таблиц остатков квадратов и кубов.

Задача 35. а) Известно, что p, $p + 10$, $p + 14$ — простые числа. Найдите p.

б) Известно, что p, $2p + 1$, $4p + 1$ — простые числа. Найдите p.

Подсказка. Рассмотрите остатки от деления на 3.

Задача 36. Известно, что p и $8p^2+1$ — простые числа. Найдите p.

Задача 37. Известно, что p и p^2+2 — простые числа. Докажите, что p^3+2 также простое число.

Задача 38. Докажите, что не существует таких натуральных чисел a и b , что $a^2-3b^2=8$.

Задача 39. а) Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?

б) Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел быть квадратом целого числа?

Задача 40. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

Задача 41. Известно, что p, $4p^2+1$ и $6p^2+1$ — простые числа. Найдите p.

Методические замечания. Очень часто задачи, в которых встречаются квадраты натуральных чисел (например, задачи 36–40), решаются перебором остатков от деления на 3 или на 4. Дело в том, что и при делении на 3, и при делении на 4 квадраты могут давать только остатки 0 и 1.

Задача 42. Докажите, что число $100\ldots00500\ldots001$ (в каждой из двух групп по 100 нулей) не является кубом целого числа.

Задача 43. Докажите, что a^3+b^3+4 не является кубом целого числа ни при каких натуральных a и b.

Задача 44*. Докажите, что число $6n^3+3$ не является шестой степенью целого числа ни при каком натуральном n.

Методические замечания. В задачах, в которых встречаются кубы целых чисел (например, задачи 42–44), бывает полезно перебрать остатки от деления на 7 или на 9 (и в том и в другом случае возможны лишь три различных остатка: 0, 1, 6 и 0, 1, 8 соответственно).

Задача 45*. Пусть x, y, z — натуральные числа, причём $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что xy делится на 12.

Для преподавателей. Материал, изложенный в этом параграфе, может составить основу по крайней мере двух занятий. Первое занятие нужно посвятить технике вычисления остатков. На втором следует подробно обсудить идею перебора остатков при решении различных задач.

§ 3. Разные задачи

В этом параграфе приведена серия задач на делимость, не объединённых какой-либо идеей или методом решения. Однако во многих из них используются соображения, изложенные в предыдущих двух параграфах.

Задача 46. а) Натуральное число a таково, что $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.

б) Натуральные числа a и b таковы, что $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

Задача 47. Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.

Задача 48. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Задача 49. Докажите, что сумма n последовательных нечётных натуральных чисел при $n > 1$ является составным числом.

Задача 50. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 — при делении на 2, 2 — при делении на 3, 3 — при делении на 4, 4 — при делении на 5, 5 — при делении на 6.

Задача 51. Докажите, что если $(n - 1)! + 1$ делится на n, то n — простое число.

Отдельно обсудим следующие две задачи.

Задача 52*. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа $n + 1$, $n + 2$, …, $n + 1989$ составные.

Решение. Попробуем рассказать, как можно прийти к решению. Число $n + 1$ должно быть составным. Попытаемся пойти по самому простому пути: сделаем так, чтобы $n + 1$ делилось на 2. Число $n + 2$ также должно быть составным, но делиться на 2 уже не может. Попытаемся опять пойти по самому простому пути: хотелось бы сделать так, чтобы $n + 2$ делилось на 3. Продолжая в том же духе, можно пытаться найти такое число n, что $n + 1$ делится на 2, $n + 2$ — на 3, $n + 3$ — на 4 и т. д. Это равносильно тому, что $n - 1$ делится на 2, 3, 4, …, 1990. Такое число, конечно, существует — например, 1990!. Итак, в качестве искомого n можно взять число $1990! + 1$.

Задача 53*. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

Решение. Предположим противное. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — все простые числа. Рассмотрим число $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Это число не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и, следовательно, не может быть разложено в произведение простых. Противоречие.

Для преподавателей. Задачи этого параграфа, конечно, не должны решаться на одном занятии. Они могут появляться на занятиях кружка в течение всего учебного года, использоваться в олимпиадах, матбоях и т. д.

§ 4. Алгоритм Евклида

В первом параграфе мы обсудили понятие наибольшего общего делителя двух натуральных чисел и выяснили, как его можно найти: достаточно выписать разложения этих чисел на простые множители и взять их общую часть. Однако для больших чисел эта процедура практически неосуществима. Попробуйте, например, таким способом найти наибольший общий делитель чисел 1381955 и 690713. К счастью, существует другой метод, позволяющий вычислить НОД двух чисел. Он называется алгоритмом Евклида.

Алгоритм Евклида основан на следующем простом соображении: любой общий делитель чисел a и b $(a > b)$ делит также число $a - b$; кроме того, любой общий делитель чисел b и $a - b$ делит число a. Тем самым $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a - b)$. Мы, по существу, изложили алгоритм Евклида.

Покажем, как он работает для конкретных чисел. Найдём наибольший общий делитель чисел 451 и 287:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(451, 287) &= \text{НОД}(287, 164) = \\ &= \text{НОД}(164, 123) = \\ &= \text{НОД}(123, 41) = \\ &= \text{НОД}(82, 41) = \\ &= \text{НОД}(41, 41) = \\ &= 41.\end{aligned}$$

Заметим, что алгоритм Евклида можно ускорить: заменять a не на $a - b$, а сразу на остаток от деления a на b. Продемонстрируем это на примере чисел, приведённых в начале параграфа:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(1381955, 690713) &= \text{НОД}(690713, 529) = \\ &= \text{НОД}(529, 368) =\end{aligned}$$

$$= \text{НОД}(368, 161) =$$
$$= \text{НОД}(161, 46) =$$
$$= \text{НОД}(46, 23) =$$
$$= \text{НОД}(23, 0) =$$
$$= 23.$$

Как видно, этот метод очень быстро приводит к результату.

Задача 54. Найдите наибольший общий делитель чисел $2n+13$ и $n+7$.

Решение. $\text{НОД}(2n+13, n+7) = \text{НОД}(n+7, n+6) = \text{НОД}(n+6, 1) = 1$.

Задача 55. Докажите, что дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ несократима ни при каком натуральном n.

Задача 56. Найдите $\text{НОД}(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.

Задача 57. Найдите $\text{НОД}(111\ldots111, 11\ldots11)$ (в записи первого числа 100 единиц, в записи второго — 60).

Для преподавателей. Алгоритм Евклида, несмотря на свою простоту, является важным элементом математического образования. Поэтому, нам кажется, ему стоит посвятить отдельное занятие. Более подробно тема «Алгоритм Евклида» освещена в статье [74].

Глава 5

Принцип Дирихле

§ 1. Клетки и кролики

Вполне возможно, что вы уже слышали про принцип Дирихле. Тогда он, скорее всего, представал перед вами в такой шутливой формулировке: «Если в N клетках сидят не менее $N + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов». Обратите внимание на расплывчатость выводов — «в какой-то из клеток», «не менее». Это является, пожалуй, отличительной чертой принципа Дирихле, которая иногда приводит к возможности неожиданных выводов на основе, казалось бы, совершенно недостаточных сведений.

Доказательство самого принципа чрезвычайно просто, в нём используется тривиальный подсчёт кроликов в клетках. Если бы в каждой клетке сидело не более одного кролика, то всего в наших N клетках сидело бы не более N кроликов, что противоречило бы условиям. Таким образом, мы доказали принцип Дирихле, применив (обязательно обратите на это внимание) метод доказательства от противного.

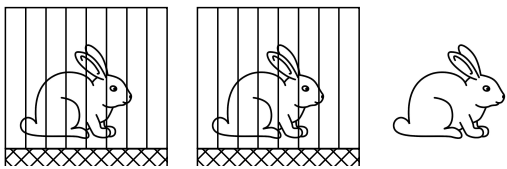


Рис. 16

Но, спросите вы, разве о кроликах идёт речь в такой задаче?

Задача 1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: чёрного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

Следующая задача также не имеет никакого отношения к кроликам и клеткам, по крайней мере судя по формулировке.

Задача 2. В лесу растёт миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две ёлки с одинаковым числом иголок.

Разберём теперь их решения.

Решение задачи 1. Достанем из мешка 3 шарика. Если бы среди этих шариков было не более одного шарика каждого из двух цветов, то всего было бы не более двух шаров — это очевидно, и противоречит тому, что мы достали три шарика. С другой стороны, понятно, что двух шариков может и не хватить. Ясно, что кроликами здесь являются шарики, а клетками — цвета: чёрный и белый.

Решение задачи 2. Перед нами миллион «кроликов»-ёлок и, увы, всего лишь 600001 клетка с номерами от 0 до 600000. Каждый «кролик»-ёлка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой ёлке. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кролика» — если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроликов»-ёлок было бы не более 600001 штук. Но ведь если два «кролика»-ёлки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

Обратите внимание на то, что формулировки этих задач носят тот же налёт расплывчатости вывода, что и сам принцип Дирихле. Часто именно такие вопросы и решаются с его помощью. Вот ещё три аналогичные задачи.

Задача 3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Задача 4. В городе Ленинграде живёт более 5 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

Задача 5. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Для преподавателей. Поговорим о том, как примерно протекает занятие по нашей теме (не следует думать, что всё занятие кружка, а это 2–3 часа, должно быть посвящено одной теме, — это утомляет ребят. Видимо, лучше всего решать на занятии задачи на две-три разные темы, не забывая и о развлекательных задачах). Сначала ребята решают несколько простых упражнений вроде задач 1 или 2 — иногда они даже не понимают,

что же нужно доказывать: на примере этих и последующих задач следует пояснить отличие интуитивных соображений от настоящего доказательства. При разборе этих задач подчеркните общность идеи — это для ребят обычно совсем не очевидно. После этого следует серия задач на сознательное повторение рассуждений, только что проведённых преподавателем (задачи 3–7). Конечно, сначала следует давать задачи попроще. Только после этого, как нам кажется, можно рассказать ребятам о том, что такое принцип Дирихле, и подчеркнуть, что он лежит в основе всех приведённых решений. Старайтесь в дальнейшем при разборе задач иногда приводить решение полностью, даже без упоминания слов «принцип Дирихле», — чтобы напомнить ребятам о том, что он из себя представляет.

Если вы внимательно прочитали всё, что было написано выше, и попытались решить задачу 5 так же, как и первые две, то, скорее всего, вам это не удалось. Ведь из принципа Дирихле следует лишь, что есть два ящика с яблоками одного сорта. В решении этой задачи нам поможет «обобщённый принцип Дирихле»: «Если в N клетках сидят не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k+1$ кролик».

Обратите внимание на то, что в случае $k=1$ обобщённый принцип Дирихле превращается в обычный принцип Дирихле. Доказательство этого «обобщённого принципа» оставляем вам в качестве упражнения.

Решение задачи 5. Рассадим 25 ящиков-«кроликов» по трём клеткам-сортам. Так как $25=3\cdot 8+1$, применим «обобщённый принцип Дирихле» для $N=3$, $k=8$ и получим, что в какой-то клетке-сорте не менее 9 ящиков.

Если вы разобрали только что приведённое здесь решение, то было бы очень поучительно проверить, сможете ли вы изложить это же решение без упоминания какого бы то ни было принципа Дирихле, пользуясь лишь рассуждениями типа тривиального подсчёта, с помощью которых мы доказали принцип Дирихле.

В большинстве всех дальнейших задач на принцип Дирихле необходимо применять именно обобщённый принцип Дирихле. Вот ещё две задачи.

Задача 6. В стране Курляндии m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на ответственный матч. Самолёт сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Ещё один футболист прилетел

к месту предстоящего матча на вертолёте. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.

Задача 7. Дано 8 различных натуральных чисел, не бóльших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковые.

При решении задачи 7 встречается, казалось бы, непреодолимое препятствие. Различных разностей может быть 14 — от 1 до 14 — это те 14 клеток, в которые мы будем сажать кроликов. Кто же будет нашими кроликами? Ими, конечно, должны быть разности между парами данных нам натуральных чисел. Однако имеется 28 пар и их можно рассадить по 14 клеткам так, что в каждой клетке будет сидеть ровно два «кролика» (и, значит, в каждой меньше трёх). Здесь надо использовать дополнительное соображение: в клетке с номером 14 может сидеть не более одного кролика, ведь число 14 можно записать как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: $14 = 15 - 1$. Значит, в оставшихся 13 клетках сидят не менее 27 кроликов, и применение обобщённого принципа Дирихле даёт нам желаемый результат.

§ 2. Вариации на тему

В серии из четырёх следующих задач также необходимо применить принцип Дирихле (или обобщённый принцип Дирихле) плюс какое-либо дополнительное соображение.

Задача 8. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Задача 9. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Задача 10. а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в любом уголке (рис. 17) было по крайней мере одно незакрашенное поле?

б) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом уголке (рис. 17) было по крайней мере одно закрашенное поле?

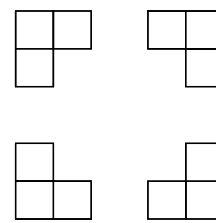


Рис. 17

Подсказка к задаче 10а. Разбейте доску на 16 квадратиков 2×2 — это клетки; кроликами, конечно, будут чёрные поля.

Задача 11. Десять школьников на олимпиаде решили 35 задач, причём известно, что среди них есть школьник, решивший ровно одну задачу, школьник, решивший ровно две задачи, и школьник, решивший ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

Методические замечания. При разборе задач очень полезно чётко разделять доказательство на поиск кроликов и клеток, дополнительное соображение и, наконец, применение принципа Дирихле. В качестве конкретной, хотя и не главной цели для вас может служить выработка известного автоматизма в применении принципа Дирихле и навыка в определении по внешнему виду задачи того, что она — на принцип Дирихле.

Теперь решим ещё несколько задач на применение принципа Дирихле, формулировки которых имеют «геометрическую» направленность.

Задача 12. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Задача 13. Какое наибольшее число пауков может ужиться на паутине, показанной на рис. 18? Паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем 1,1 метра.

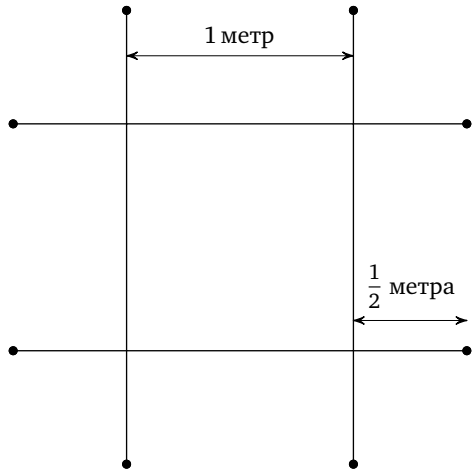


Рис. 18

Задача 14. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Задача 15. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

Решение. Разобьём наш квадрат на 25 квадратов со стороной 20 см. Согласно обобщённому принципу Дирихле в какой-то из них попадёт по крайней мере три точки из 51 брошенной.

* * *

Заметим теперь, что в основе доказательства принципа Дирихле у нас лежала идея сложения неравенств. Одно замечательное следствие из неё обычно объединяют с темой «Принцип Дирихле». Это следствие гласит: «Если сумма n чисел равна S, то среди них есть как число, не большее S/n, так и число, не меньшее S/n».

Конечно же, ведь если, например, все числа больше S/n, то их сумма больше S, что противоречит условию.

Имея такое мощное оружие, мы отправляемся на поиски решения в следующей серии задач.

Задача 16. Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату — 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придётся подождать с покупкой до следующей зарплаты.

Задача 17. В бригаде 7 человек, и их суммарный возраст — 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трёх человек, сумма возрастов которых больше 142 лет.

Задача 18*. На планете в звёздной системе Тау Кита суша занимает более половины площади планеты. Докажите, что таукитяне могут прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей. (Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита.)

Разберём решение задачи 17. Рассмотрим все возможные тройки рабочих бригады. Сумма их суммарных возрастов, как легко подсчитать, равна $15 \cdot 332$, а всего таких троек 35. Значит, есть тройка, суммарный возраст в которой не меньше чем $15 \cdot 332/35$, что больше 142.

* * *

Займёмся теперь теорией чисел. Несколько замечательных задач, касающихся делимости целых чисел, решаются также с помощью принципа Дирихле.

Задача 19. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1987.

Задача 20. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

Задача 21*. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1987.

Задача 22*. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

Разберём решение задачи 21. Рассмотрим 1988 чисел-«кроликов» 1, 11, 111, …, 111…11 (1988 единиц) и посадим их в 1987 клеток с номерами 0, 1, 2, …, 1986 — каждое число попадает в клетку с номером, равным остатку от деления этого числа на 1987. Тогда (по принципу Дирихле) найдутся два числа, которые имеют одинаковые остатки при делении на 1987. Пусть это числа 11…11 (m единиц) и 11…11 (n единиц), причём $m > n$. Но их разность, которая делится на 1987, равна 11…1100…00 ($m - n$ единиц и n нулей). Вычеркнем все нули — ведь они не имеют никакого отношения к делимости на 1987 — и получим число из одних единиц, которое делится на 1987.

§ 3. Разные задачи

Задача 23. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

Задача 24. Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

Задача 25. Пятнадцать мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

Задача 26. Цифры $1, 2, \ldots, 9$ разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

Задача 27. В таблице а) 10 × 10; б) 9 × 9 расставлены целые числа, причём любые два числа в соседних клетках отличаются не более чем на 5. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

Задача 28*. Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Задача 29*. На клетчатой плоскости дано пять произвольных узлов сетки. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих какие-то две из этих точек, также является узлом сетки.

Задача 30*. На складе имеется по 200 сапог размеров 41, 42 и 43, причём среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Задача 31. В алфавите языка племени Ни-Бум-Бум 22 согласные буквы и 11 гласных, причём словом в этом языке называется произвольное буквосочетание, в котором нет двух согласных подряд и ни одна буква не использована дважды. Алфавит разбили на 6 непустых групп. Докажите, что из всех букв одной из групп можно составить слово.

Задача 32*. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдётся несколько, сумма которых делится на 10.

Задача 33*. Дано 11 различных натуральных чисел, не бóльших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Задача 34*. Одиннадцать школьников занимаются в пяти кружках дома культуры. Докажите, что найдутся такие два школьника A и B, что все кружки, которые посещает A, посещает и B.

Помните, что если вы не решите какую-то задачу сразу, то к ней стоит вернуться позже. Не спешите смотреть подсказки! Не забывайте и о том, что эти задачи, может быть, решаются и без применения принципа Дирихле. Хотя среди всех предложенных задач есть довольно сложные мы надеемся, что и они будут Вами успешно решены — ведь теперь вы уже знакомы с принципом Дирихле.

Глава 6

Графы–1

В этой главе речь пойдёт о замечательных математических объектах. Они возникают очень часто и оказываются чрезвычайно полезными при решении многих внешне не похожих друг на друга задач. Однако графы интересны и сами по себе. В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: «Теория графов». Мы обсудим некоторые начальные идеи этой теории и покажем, как графы применяются при решении задач.

§ 1. Понятие графа

Задача 1. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Марс — Уран, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер и Юпитер — Марс. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Решение. Нарисуем схему: планетам будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам — непересекающиеся между собой линии (рис. 19). Теперь видно, что долететь от Земли до Марса нельзя.

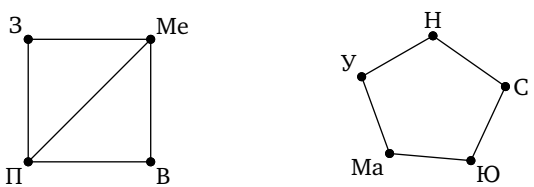


Рис. 19

Задача 2. Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображённого на рис. 20, расположить их так, как показано на рис. 21?

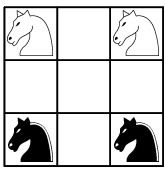


Рис. 20

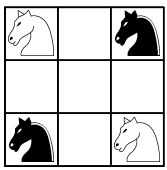


Рис. 21

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Рис. 22

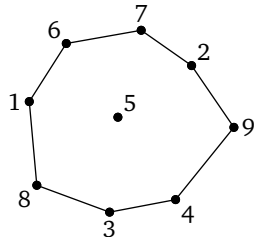


Рис. 23

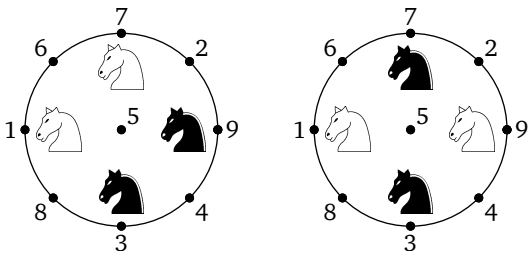


Рис. 24

Решение. Занумеруем клетки доски числами $1, 2, 3, \ldots, 9$ так, как показано на рис. 22. Каждой клетке сопоставим точку на плоскости, и если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня, то соединим соответствующие точки линией (рис. 23). Исходная и требуемая расстановки коней изображены на рис. 24.

Порядок следования коней на окружности, очевидно, не может измениться. Поэтому переставить коней требуемым образом невозможно.

Решение этих двух внешне не похожих друг на друга задач объединяет общая идея: графическое изображение условия. При этом получившиеся картинки тоже оказались очень похожими: они представляют из себя набор точек, некоторые из которых соединены линиями.

Такие картинки и называются *графами*. Точки при этом называются *вершинами* графа, а линии — *рёбрами*.

Вот ещё две задачи, для решения которых полезно нарисовать граф.

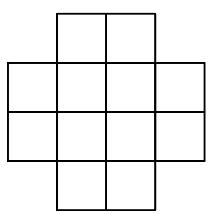


Рис. 25

Задача 3. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки (рис. 25). Можно ли

обойти её ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

Задача 4. В стране Цифра есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Методические замечания. Конечно, данное нами определение графа недостаточно строго. Однако аккуратное определение слишком громоздко и лишь затруднило бы обсуждение. Для наших целей пока вполне достаточно и интуитивного понимания.

* * *

Заметим, что один и тот же граф можно изображать по-разному. Так, например, граф из задачи 1 может быть нарисован и иначе (рис. 26).

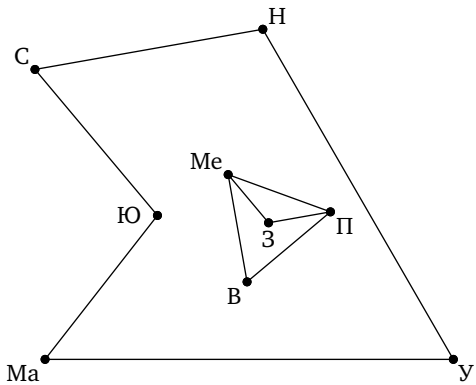
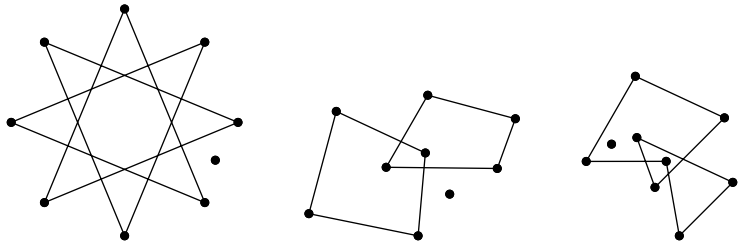


Рис. 26

Важно лишь, какие вершины соединены друг с другом, а какие — нет.

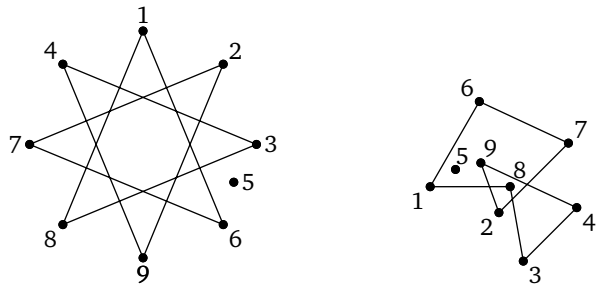
Такие одинаковые, но, быть может, по-разному нарисованные графы принято называть изоморфными. Попробуйте найти на рис. 27 графы, изоморфные графу из задачи 2 (рис. 23).

Правильный ответ — графы *а*) и *в*). В том, что они изоморфны графу из задачи 2, легко убедиться. Для этого достаточно правильно занумеровать их вершины (рис. 28).



а) *б*) *в*)

Рис. 27



а) *б*)

Рис. 28

Доказательство неизоморфности графов, изображённых на рис. 23 и 27*б*, несколько сложнее. Мы вернёмся к нему во второй части (см. с. 178).

Для преподавателей. Видимо, понятие графа должно появляться на занятии после того, как разобрано несколько задач типа задач 1, 2, решающее соображение в которых — графическое изображение условия. Важно, чтобы школьники сразу осознали, что один и тот же граф может быть нарисован разными способами. При обсуждении понятия изоморфизма можно решить несколько упражнений разобранного выше типа.

§ 2. Степени вершин и подсчёт числа рёбер

В предыдущем параграфе мы определили граф как набор точек (вершин), некоторые из которых соединены между собой линиями (рёбрами).

Количество рёбер, выходящих из данной вершины, мы будем называть её степенью. Так, например, в графе, изображённом на рис. 29, вершина A имеет степень 3, вершина B — степень 2, вершина C — степень 1.

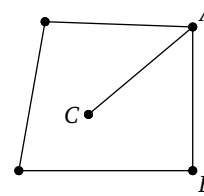


Рис. 29

Задача 5. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?

Решение. Предположим, что это возможно. Рассмотрим тогда граф, вершины которого соответствуют телефонам, а рёбра — соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна пяти. Подсчитаем количество рёбер в этом графе. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчёте каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому число рёбер графа должно быть равно $15 \cdot 5/2$. Но это число нецелое! Следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом невозможно.

При решении этой задачи мы выяснили, как подсчитать число рёбер графа, зная степени всех его вершин. Для этого нужно просуммировать степени вершин и полученный результат разделить на два.

Задача 6. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Заметим теперь, что из вышесказанного можно получить следствие: сумма степеней всех вершин графа должна быть чётной (иначе её нельзя было бы разделить на два нацело). Для более удобной формулировки этого утверждения дадим определение:

вершина графа, имеющая нечётную степень, называется *нечётной*, а имеющая чётную степень — *чётной*.

Теорема. *Число нечётных вершин любого графа чётно.*

Для доказательства этой теоремы осталось заметить, что сумма нескольких целых чисел чётна тогда и только тогда, когда количество нечётных слагаемых чётно.

Методические замечания. Теорема о чётности числа нечётных вершин — одно из центральных мест этой главы. Очень важно до конца разобраться в её доказательстве и научиться применять при решении задач.

Задача 7. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

Решение. Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3, 11 — степень 4, 10 — степень 5. Однако у такого графа 19 нечётных вершин, что противоречит теореме.

Задача 8. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединён с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединён с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединён с пятью другими?

Задача 9. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Задача 10. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Задача 11. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведёт 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Задача 12. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Задача 13. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Для преподавателей. Подробное обсуждение теоремы о чётности числа нечётных вершин может составить отдельное занятие. При разборе решений нескольких задач мы рекомендуем не ссылаться на теорему, а фактически повторять её доказательство.

§ 3. Несколько новых определений

Разберём следующую задачу.

Задача 14. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Решение. Рассмотрим два произвольных города и предположим, что они не соединены путём, т. е. такой последовательностью дорог, в ко-

торой начало очередной дороги совпадает с концом предыдущей. Каждый из этих двух городов по условию соединён не менее чем с семью другими; при этом все упомянутые города различны — ведь если какие-то два из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные города (рис. 30).

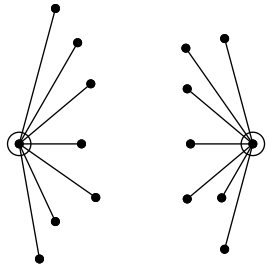


Рис. 30

Таким образом, мы указали не менее 16 городов. Противоречие.

* * *

Дадим в связи с этой задачей одно важное определение:

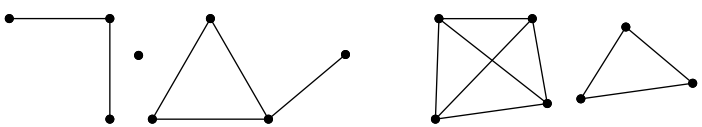
граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены путём, т. е. последовательностью рёбер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

Отметим здесь же, что замкнутый путь, т. е. такой, начало и конец которого совпадают, называется *циклом*.

Мы можем теперь переформулировать утверждение предыдущей задачи так: граф дорог страны Семёрка связен.

Задача 15. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $(n-1)/2$, связен.

Возникает естественный вопрос: а как выглядит несвязный граф? Он состоит из нескольких «кусков», в каждом из которых от любой вершины можно добраться по рёбрам до любой другой. Так, например, граф, изображённый на рис. 31*а*, состоит из трёх «кусков», а граф на рис. 31*б* — из двух «кусков».



а) *б*)

Рис. 31

Эти «куски» называются *компонентами связности* графа. Каждая компонента связности является, конечно, связным графом. Отметим также, что связный граф имеет одну компоненту связности.

Задача 16. В Тридевятом царстве есть лишь один вид транспорта — ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Даль-

ний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

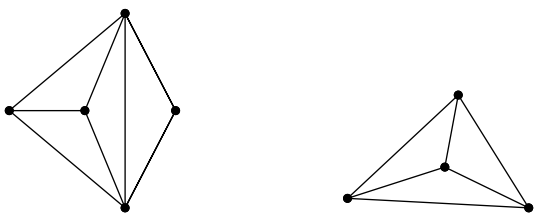
Решение. Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Нам нужно доказать, что она содержит также и город Дальний. Предположим противное. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин — по 20 рёбер. Таким образом, в этом графе (компоненте связности) ровно одна нечётная вершина. Противоречие!

Методические замечания. Понятие связности чрезвычайно важно и постоянно будет использоваться в процессе дальнейшего изучения теории графов. Отметим, что основной момент в решении задачи 16 — рассмотрение компоненты связности — является содержательным соображением и часто оказывается полезным при решении задач.

Задача 17. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

§ 4. Эйлеровы графы

Задача 18. Можно ли нарисовать граф, изображённый а) на рис. 32*а*; б) на рис. 32*б*, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?



а) *б*)

Рис. 32

Решение. а) Можно. б) Нельзя. Действительно, рисуя граф так, как требуется в условии, в каждую вершину, за исключением начальной и конечной, мы войдём столько же раз, сколько выйдем из неё. Поэтому степени всех вершин нарисованного графа, кроме двух, должны быть чётными, а это не так.

При решении задачи 18 было доказано следующее общее утверждение.

Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз, должен иметь не более двух нечётных вершин.

Впервые такие графы были исследованы великим математиком Леонардом Эйлером в 1736 году в связи со знаменитой задачей о кёнигсбергских мостах (см. задачу 19). Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются *эйлеровыми* (или *уникурсальными*).

Задача 19. Схема мостов города Кёнигсберга изображена на рис. 33. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

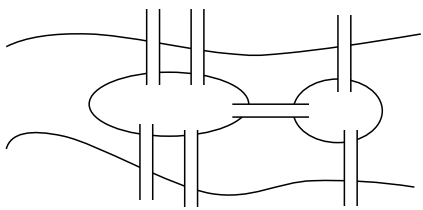


Рис. 33

Задача 20. Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист

а) не с него начал и не на нём закончил;

б) с него начал, но не на нём закончил;

в) с него начал и на нём закончил?

Задача 21. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (рис. 34), так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

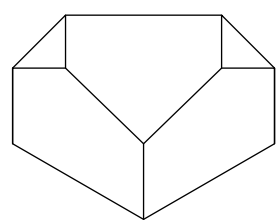


Рис. 34

Задача 22. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?

Для преподавателей. Подведём итог. Первая и главная, как нам кажется, цель, которую нужно преследовать, занимаясь графами, — научить школьников видеть граф в условии задачи и грамотно переводить это условие на язык теории графов. Кроме того, важно, чтобы ребята правильно применяли теорему о чётности числа нечётных вершин графа, понимали, что такое компонента связности, и умели пользоваться критерием эйлеровости.

Конечно, не стоит рассказывать обо всём этом подряд на нескольких последовательных занятиях. Эффект будет намного больше, если школьники будут получать новые сведения (и новые задачи!) о графах постепенно, в течение всего учебного года.

Глава 7

Неравенство треугольника

§ 1. Введение

Как вы наверняка знаете, неравенство треугольника гласит: для любых трёх точек плоскости A, B и C верно, что $AB + BC \geqslant AC$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC.

Для преподавателей. Неравенство треугольника — самое известное и самое фундаментальное геометрическое неравенство, недаром его учат в школе. Именно поэтому полезно выяснить у ребят, знают ли они его, решали ли задачи на его применение. Конечно же, необходимо напомнить про то, что кратчайшим путём между двумя точками является отрезок прямой.

Начнём знакомство с неравенством треугольника с серии простых упражнений.

Задача 1. Докажите, что для любых трёх точек A, B и C на плоскости выполнено неравенство $AC \geqslant |AB - BC|$.

В этой задаче необходимо, помимо данной выше формулировки, дать её очевидное геометрическое истолкование: длина любой стороны треугольника не меньше модуля разности длин двух других сторон.

Задача 2. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8, длина стороны AB — 0,6. Известно, что длина стороны BC — целое число. Какова эта длина?

Задача 3. Докажите, что длина любой стороны треугольника не превосходит его полупериметра.

Задача 4. В стране 4 города: A, B, C и D. Два самолёта одновременно вылетели из города A. Маршрут первого: A–B–D–C–A–D–B–C–A, а маршрут второго: A–B–C–D–A–B–C–D–A–B–C–D–A. Какой из самолётов раньше закончит свой маршрут, если их скорости одинаковы?

Задача 5. От Ленинграда до Москвы 660 км, от Ленинграда до деревни Лыково — 310 км, от Лыково до Клина — 200 км, и от Клина до Москвы — 150 км. Каково расстояние от Лыково до Москвы?

Подсказка. Заметим, что сумма расстояний от Ленинграда до Лыкова, от Лыкова до Клина и от Клина до Москвы равна расстоянию от Ленинграда до Москвы, а значит, все эти населённые пункты лежат на одной прямой.

Методические замечания. Обратите внимание на то, что в решении задачи 5 используется не само неравенство треугольника, а его экстремальное свойство: для любых трёх точек A, B и C равенство $AB+BC=AC$ означает, что точка B лежит на отрезке AC.

После того как решены эти простые упражнения, можно перейти к следующей серии задач. Это простые геометрические неравенства, доказываемые применением неравенства треугольника.

Задача 6. Найдите внутри выпуклого четырёхугольника такую точку, что сумма расстояний от неё до вершин минимальна.

Задача 7. На плоскости дан квадрат $ABCD$ и точка O. Докажите, что расстояние от точки O до одной из вершин квадрата не превосходит суммы расстояний от O до трёх других вершин квадрата.

Задача 8. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике сумма длин диагоналей больше его полупериметра и меньше периметра.

Задача 9. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике сумма длин диагоналей больше периметра и меньше удвоенного периметра.

Задача 10. Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними не превосходит полупериметра треугольника.

Для примера разберём решение задачи 6. Обозначим вершины четырёхугольника через A, B, C и D (по часовой стрелке), а точку пересечения диагоналей — через O. Тогда сумма расстояний от O до вершин равна сумме длин диагоналей AC и BD. Но, рассматривая любую другую точку P, видим, во-первых, что сумма расстояний от P до вершин не меньше $AC+BD$, а во-вторых, либо $PA+PC>AC$, либо $PB+PD>BD$. Значит, эта сумма равна $AC+BD$, только если P совпадает с точкой O. Значит, точка O искомая.

Один из самых распространённых способов доказательства геометрических неравенств состоит в том, что применяется неравенство

треугольника, возможно, с некоторыми дополнительными соображениями. Так, например, в задаче 7 нужное неравенство получается складыванием нескольких неравенств треугольника.

§ 2. Вспомогательные преобразования

Зачастую на рисунке, изображающем условие задачи, не видно треугольника, применение неравенства треугольника для которого дало бы решение. В таком случае может помочь удачно подобранное геометрическое преобразование.

Очередная серия задач посвящена применению идеи симметрии в совокупности с неравенством треугольника.

Задача 11. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему надо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, и зайти обратно в лес в другой заданной точке. Как ему сделать это, пройдя по самому короткому пути?

Задача 12. Полуостров представляет собой острый угол, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного берега полуострова, затем до другого и вернуться домой, пройдя при этом по самому короткому пути?

Задача 13. Точку A, лежащую внутри острого угла, отразили симметрично относительно сторон угла. Полученные точки B и C соединили и точки пересечения отрезка BC со сторонами угла обозначили через D и E (рис. 35). Докажите, что $BC/2 > DE$.

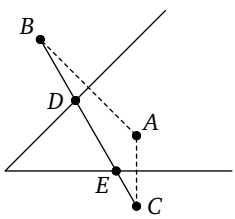


Рис. 35

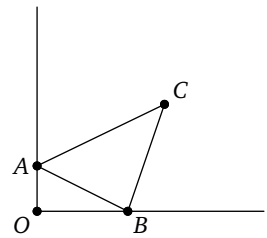


Рис. 36

Задача 14. Точка C лежит внутри данного прямого угла, а точки A и B лежат на его сторонах (рис. 36). Докажите, что периметр треугольника ABC не меньше удвоенного расстояния OC, где O — вершина данного прямого угла.

Разберём решение задачи 11. Обозначим точку, в которой грибник выходит из леса, через A, а точку, в которой он должен войти в лес, через B. Отразим точку A симметрично относительно прямой — шоссе (рис. 37) и получим точку A'. Тогда из любого пути AKB (K — это точка, в которой грибник выходит на шоссе) можно, отразив симметрично относительно шоссе его участок AK, получить равный ему по длине путь $A'KB$, длина которого по неравенству треугольника не меньше $A'B$.

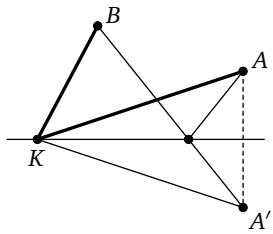


Рис. 37

Следовательно, искомая точка K, в которой грибник должен подойти к шоссе, — это точка пересечения $A'B$ и шоссе. С помощью аналогичных соображений решаются и другие задачи этой серии. Так, например, в задаче 14 надо отразить точку C симметрично относительно прямых OA и OB, получив точки C' и C''. Тогда периметр треугольника ABC можно заменить на сумму длин отрезков $C'A$, AB и BC'', которая по неравенству треугольника не меньше длины отрезка $C'C''$, равной $2 \cdot OC$.

Для преподавателей. В первую очередь нужно напомнить школьникам, что осевая симметрия не меняет расстояний. Затем подчеркните общую идею серии: используется преобразование искомого пути, которое не меняет его длину, но при этом существенно упрощает задачу (сводя решение к применению неравенства треугольника).

* * *

Во многих задачах действие происходит на поверхности каких-то пространственных тел, и потому в таких задачах неравенство треугольника можно применить лишь после того, как мы развернём эту поверхность на плоскости. Типичными примерами могут служить следующие три задачи.

Задача 15. Муха сидит в вершину X деревянного куба. Как ей переползти в противоположную вершину куба Y, двигаясь по самому короткому пути?

Задача 16. Муха сидит на внешней поверхности круглого стакана. Ей надо перебраться в другую точку, лежащую на внутренней поверхности стакана. Найдите кратчайший путь мухи (толщиной стенок стакана пренебрегите).

Задача 17. На середине ребра деревянной треугольной пирамиды с рёбрами одинаковой длины, сидит паук, которому необходимо добраться до середины противоположного ребра. Как ему это сделать за наименьшее время?

§ 3. Дополнительные построения

В некоторых случаях геометрическое неравенство требует для своего доказательства дополнительного построения. Эти задачи являются наиболее сложными, так как поиск дополнительного построения в них требует определённого навыка. Постарайтесь развить такой навык, решая следующую серию задач.

Задача 18. Точка O лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $AO + OC < AB + BC$.

Задача 19. Докажите, что сумма расстояний от точки O до вершин треугольника меньше его периметра, если точка O лежит внутри этого треугольника. А если она лежит вне треугольника?

Задача 20. Решите задачу 12, если полуостров представляет собой тупой угол.

Задача 21. Докажите, что длина медианы AM треугольника ABC не превосходит полусуммы длин сторон AB и AC. Докажите также, что сумма длин медиан треугольника не превосходит его периметра.

Задача 22. а) Треугольник $A'B'C'$ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что периметр треугольника $A'B'C'$ не больше периметра треугольника ABC.

б) Треугольник ABC лежит внутри выпуклого многоугольника M. Докажите, что периметр треугольника ABC не больше, чем периметр многоугольника M.

в) Выпуклый многоугольник M' лежит внутри выпуклого многоугольника M. Докажите, что периметр многоугольника M' не больше периметра многоугольника M.

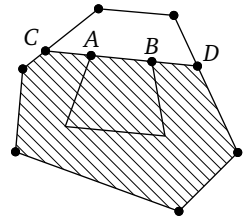


Рис. 38

Главная идея решения задачи 22 состоит в следующем. Проведём через сторону AB многоугольника M' прямую (рис. 38), которая пересекает контур многоугольника M в точках C и D. Тогда по неравенству треугольника очевидно, что периметр того куска многоугольника M

(из двух, на которые рассекла его прямая AB), который содержит M', не больше, чем периметр многоугольника M.

Повторяя эту операцию, придём к многоугольнику M'.

* * *

И наконец заключительная серия задач.

Задача 23. Выпуклый многоугольник, вырезанный из бумаги, сложили пополам, перегнув его по прямой (рис. 39). Докажите, что периметр полученного многоугольника не превосходит периметра исходного.

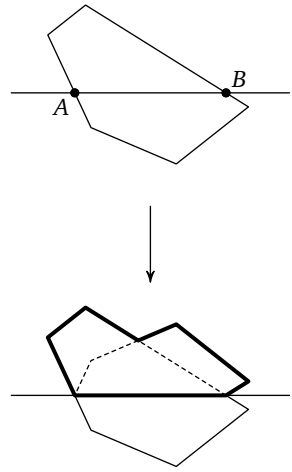


Рис. 39

Задача 24. Докажите, что в выпуклом многоугольнике не может быть трёх сторон, превосходящих по длине наибольшую диагональ.

Задача 25. Докажите, что периметр треугольника не превосходит суммы длин медиан, увеличенной в $\frac{4}{3}$ раза. (Для решения этой задачи надо знать, в каком отношении делятся медианы точкой их пересечения.)

Задача 26. Две деревни находятся по разные стороны от реки, берега которой — параллельные прямые. В каком месте реки необходимо построить мост, перпендикулярный берегам, так, чтобы длина пути из одной деревни в другую была минимальной?

Задача 27. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

* * *

Для преподавателей. Неравенство треугольника, безусловно, заслуживает большего, чем однократное упоминание и разбор на занятии. При продолжении занятий по теме «Неравенства» надо кратко напомнить ребятам содержание предыдущих занятий и основные принципы применения неравенства треугольника.

Глава 8

Игры

Дети любят играть! Поэтому у школьников 6–8 классов большой интерес вызывают задачи-игры. С их помощью преподаватель может внести в занятие элемент развлечения: устроить турнир, сеанс одновременной игры, наконец, просто дать ребятам поиграть.

В то же время такие задачи весьма содержательны. При изложении их решения школьники обычно испытывают большие трудности. Ведь необходимо, во-первых, грамотно сформулировать стратегию, а во-вторых, доказать, что она действительно ведёт к выигрышу.

Поэтому задачи-игры очень полезны для развития разговорной математической культуры и чёткого понимания того, что значит решить задачу.

Необходимо осознать, что соображения типа «если он ходит так, то я хожу так» не являются, как правило, решением игры. Образцы правильных рассуждений приведены в тексте.

Сделаем ещё несколько терминологических замечаний. Во всех играх предполагается, что играют двое и ходы делаются по очереди (игроки не могут пропустить ход). Ответить всегда надо на один и тот же вопрос — кто побеждает: начинающий (первый) или его партнёр (второй)? В дальнейшем это оговариваться не будет.

§ 1. Игры-шутки

Первый класс игр, о которых пойдёт речь, — игры-шутки. Это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники. Поэтому для решения такой игры не нужно указывать выигрышную стратегию. Достаточно лишь доказать, что выигрывает тот или иной игрок (независимо от того, как он будет играть!).

Приведём пример такой игры-шутки.

Задача 1. Двое по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Решение. Основное соображение: после каждого хода количество кусков увеличивается ровно на 1.

Сначала был один кусок. В конце игры, когда нельзя сделать ни одного хода, шоколадка разломана на маленькие дольки. А их 48! Таким образом, игра будет продолжаться ровно 47 ходов. Последний, 47-й ход (так же как и все другие ходы с нечётными номерами) сделает первый игрок. Поэтому он в этой игре побеждает, причём независимо от того, как будет играть.

Для преподавателей. Игры-шутки позволяют снять напряжение и усталость, дают школьникам возможность отдохнуть. Удобно давать их по одной после изложения трудного материала, в критический момент или в конце занятия. Не следует проводить целое занятие, посвящённое играм-шуткам. Полезно перед решением задачи-игры дать школьникам возможность немного поиграть друг с другом.

А теперь ещё несколько игр-шуток.

Задача 2. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Задача 3. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он чётен, то выигрывает первый игрок, если нечётен, то второй.

Задача 4. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 5. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй.

Задача 6*. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать ещё одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она ещё не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 7. Дана клетчатая доска размерами а) 9×10; б) 10×12; в) 9×11. За ход разрешается вычеркнуть любую горизонталь или любую вер-

тикаль, если в ней к моменту хода есть хотя бы одна невычеркнутая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

§ 2. Симметрия

Рассмотрим следующую игру.

Задача 8. Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол, причём так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. В этой игре выигрывает первый, независимо от размеров стола! Первым ходом он кладёт монету так, чтобы центры монеты и стола совпали. После этого на каждый ход второго игрока начинающий отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция симметрична. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, он побеждает.

Попробуем, применяя симметричную стратегию, решить ещё одну задачу.

Задача 9. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет.) Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Попытка решения. Поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, естественно попробовать симметричную стратегию. Но на этот раз (первым ходом нельзя поставить слона в центр доски) симметрию может поддерживать второй игрок. Казалось бы, по аналогии с предыдущей задачей, это и есть его выигрышная стратегия. Однако, следуя ей, второй игрок, возможно, не сумеет сделать даже свой первый ход! Слон, только что поставленный первым игроком, может бить центрально-симметричное поле.

Этот пример показывает, что при доказательстве правильности симметричной стратегии нельзя забывать о следующем обстоятельстве:

очередному симметричному ходу может помешать ход, только что сделанный противником.

Ранее сделанные ходы в силу симметрии позиции помешать не могут. Чтобы решить игру при помощи симметричной стратегии,

необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению избранного плана.

Так, решение задачи 9 легко провести, применяя не центральную, а осевую симметрию шахматной доски. За ось симметрии можно взять прямую, разделяющую четвёртую и пятую горизонтали. Симметричные относительно неё поля имеют разный цвет, и тем самым слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое. Итак, в этой игре выигрывает всё-таки второй игрок.

Симметричная стратегия совсем не обязана иметь чисто геометрический смысл. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 10. Имеется две кучки камней — по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Решение. В этой игре второй игрок побеждает при помощи симметричной стратегии: каждым своим ходом он должен брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ход.

Симметрия в этой задаче состоит в равенстве числа камней в кучках.

Для преподавателей. Идея симметрии заслуживает отдельного небольшого разговора. Перед ним необходимо решить две-три игры на симметрию (лучше на одном занятии).

Вот ещё несколько игр на ту же идею.

Задача 11. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 12. Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 13. а) Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски. Очередным ходом надо побить хотя бы одну небитую клетку. Слон бьёт и клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б)* Та же игра, но с ладьями.

Задача 14. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые 2 соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так,

чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 15. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

Задача 16. Имеются две кучки камней: в одной — 30, в другой — 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Задача 17. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведённых ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 18. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два растущих рядом лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 19*. Дан прямоугольный параллелепипед размерами а) $4 \times 4 \times 4$; б) $4 \times 4 \times 3$; в) $4 \times 3 \times 3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нём есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 20. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1.

Задача 21. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник — нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, — это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше, — очки второго. Тот из игроков, кто наберёт больше очков, побеждает.

§ 3. Выигрышные позиции

Рассмотрим следующую игру.

Задача 22. Ладья стоит на поле a1. За ход разрешается сдвинуть её на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле h8.

Решение. В этой игре побеждает второй игрок. Его стратегия очень проста: каждым своим ходом он возвращает ладью на большую диагональ a1–h8. Объясним, почему, играя так, второй игрок выигрывает. Дело в том, что первый игрок каждый раз вынужден будет уводить ладью с этой диагонали, а второй игрок после этого будет иметь возможность вернуть ладью на линию a1–h8. Так как поле h8 принадлежит диагонали, на него сумеет встать именно второй игрок.

Проанализируем это решение.

Нам удалось выделить класс *выигрышных позиций* (ладья стоит на одной из клеток диагонали a1–h8), обладающих следующими свойствами:

1) завершающая позиция игры — выигрышная;
2) за ход из одной выигрышной позиции нельзя попасть в другую;
3) из любой невыигрышной (*проигрышной*) позиции за один ход можно попасть в какую-то выигрышную.

Нахождение такого класса выигрышных позиций для игры равносильно её решению. Действительно, к победе ведёт стратегия — ходи в выигрышную позицию. Если исходная позиция выигрышная, то, как в разобранной задаче, выигрывает второй. В противном случае выигрывает начинающий.

Для преподавателей. Понятие выигрышной позиции можно вводить только после решения и обсуждения нескольких задач из этого параграфа. Напомним ещё раз, что перед решением игры очень полезно дать школьникам возможность поиграть в неё.

А теперь несколько задач на выигрышные позиции.

Задача 23. Король стоит на поле a1. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, или на одно поле вверх, или на одно поле по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит короля на поле h8.

Задача 24. Имеются две кучки конфет: в одной — 20, в другой — 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равные кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 25. На концах клетчатой полоски 1×20 стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой на одну или на две клетки. Перепрыгивать шашкой через шашку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 26. В коробке лежит 300 спичек. За ход разрешается взять из коробка не более половины имеющихся в нём спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 27. Имеется три кучки камней: в первой — 50, во второй — 60, в третьей — 70. Ход состоит в разбиении каждой кучки, состоящей более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню.

Задача 28. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль.

Задача 29*. Имеется две кучки спичек: а) 101 спичка и 201 спичка; б) 100 спичек и 201 спичка. За ход разрешается уменьшить количество спичек в одной из кучек на число, являющееся делителем количества спичек в другой кучке. Выигрывает тот, после чьего хода спичек не остаётся.

§ 4. Анализ с конца — метод поиска выигрышных позиций

При чтении предыдущего параграфа могло появиться ощущение, что поиск выигрышных позиций основан лишь на интуиции, а потому, как правило, непрост. Сейчас мы опишем общий метод, позволяющий найти выигрышные позиции во многих играх.

Вернёмся к задаче 23 про короля из предыдущего параграфа.

Попробуем найти выигрышные позиции исходя из их свойств. Как всегда, завершающая позиция игры (король стоит на h8) — выигрышная. Поэтому в клетку h8 поставим «+» (рис. 40). Так же мы будем

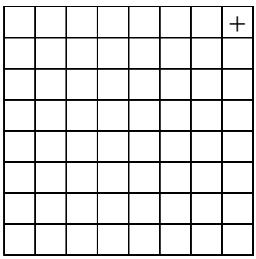


Рис. 40

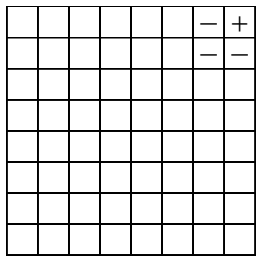


Рис. 41

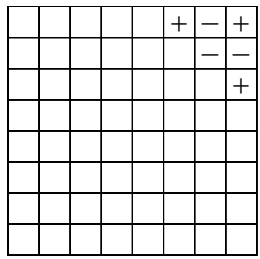


Рис. 42

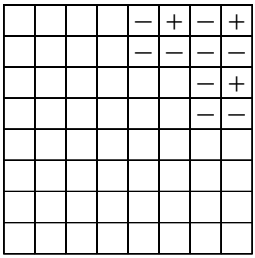


Рис. 43

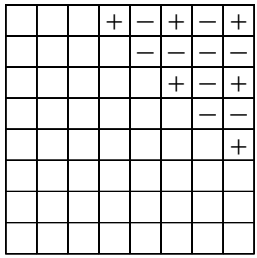


Рис. 44

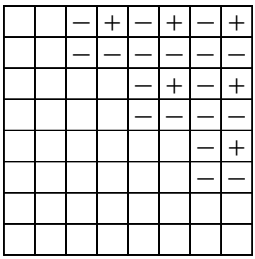


Рис. 45

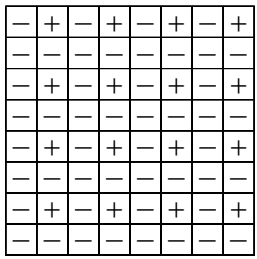


Рис. 46

отмечать все найденные выигрышные позиции. В клетках, соответствующих проигрышным позициям, будем ставить «—».

Так как позиции, из которых король может за один ход попасть на выигрышное поле h8, проигрышные, возникает расстановка, изображённая на рис. 41. С полей h6 и f8 за один ход можно попасть только на проигрышные поля. В этих клетках нужно поставить «+» — они выигрышные (рис. 42). Только что полученные выигрышные позиции порождают набор новых проигрышных позиций — h5, g5, g6, f7, e7, e8 (рис. 43). Продолжим аналогичным образом (рис. 44, 45). После получения очередного набора минусов отмечаем плюсом те поля, из которых каждый ход ведёт в проигрышную позицию. После этого отмечаем минусом те поля, из которых существует хотя бы один ход в выигрышную позицию. В итоге плюсы и минусы будут расставлены так, как показано на рис. 46.

* * *

Только что описанный метод нахождения выигрышных позиций называется «анализом с конца». Применяя его к задаче про ладью из предыдущего параграфа, легко получаем набор выигрышных позиций.

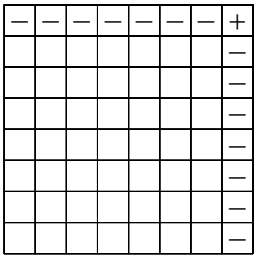


Рис. 47

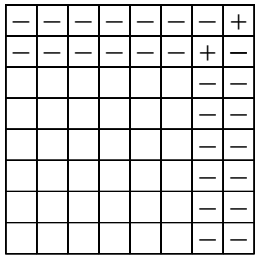


Рис. 48

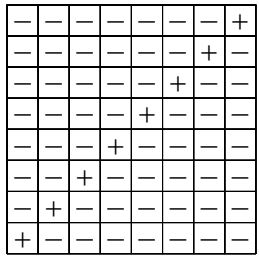


Рис. 49

Действуя так, как показано на рис. 47 и 48, получаем расстановку знаков на рис. 49.

Для преподавателей. Обсуждению этого метода полезно посвятить отдельное занятие. К этому моменту необходимо решить с учениками несколько задач на выигрышные позиции (например, задачи о ладье и короле), не используя анализ с конца. На примере этих задач нужно подробно разобрать понятие выигрышной позиции. Само же занятие, посвящённое анализу с конца, полезно начать с игры, интуитивный поиск выигрышных позиций в которой очень труден.

Задача 30. Ферзь стоит на поле c1. За ход его можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле h8.

Решение. Пользуясь анализом с конца, можно получить расстановку плюсов и минусов, показанную на рис. 50. Итак, выигрывает первый игрок, причём у него есть три варианта первого хода: на поля c5, e3, d1.

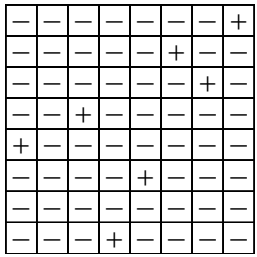


Рис. 50

Методические замечания. После подробного разбора этой задачи необходимо заново решить при помощи анализа с конца несколько уже извест-

ных задач на выигрышные позиции, а затем разобрать несколько упражнений. Придумывать их очень просто. Достаточно квадратную доску в задачах 22, 23, 30 заменить на прямоугольную доску любых размеров или на доску какой-нибудь причудливой формы. Например, можно решать задачу 22 на шахматной доске с вырезанным центральным квадратом 2×2 (можно вырезать и другие поля). Расстановка плюсов и минусов на этой доске (вырезанные клетки заштрихованы) показана на рис. 51.

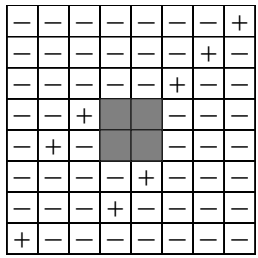


Рис. 51

Для преподавателей. На последующих занятиях мы рекомендуем иногда давать по одной игре из списка, приведённого в конце параграфа.

Для решения некоторых задач удобно сначала переформулировать их. На эту идею мы советуем вам обратить особое внимание. Её иллюстрирует следующая задача.

Задача 31. Имеется две кучки камней: в первой — 7 камней, во второй — 5. За ход разрешается брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. Покажем, как переформулировать эту задачу на уже привычном для нас языке шахматной доски. Пронумеруем вертикали и горизонтали шахматной доски числами от 0 до 7: вертикали — сверху вниз, а горизонтали — справа налево. Каждой позиции исходной игры сопоставим клетку, находящуюся на пересечении горизонтали с номером, равным числу камней в первой кучке, и вертикали с номером, равным числу камней во второй кучке. Теперь заметим, что ходу в первоначальной игре соответствует ход ферзя вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх» на шахматной доске. Таким образом, мы отождествили нашу игру с игрой из задачи 30. Отметим, что точно так же можно отождествить игры в задачах 10 и 22.

* * *

А теперь ещё несколько игр на анализ с конца.

Задача 32. Конь стоит на поле a1. За ход разрешается передвигать коня или на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 33. а) Имеется две кучки по 7 камней. За ход разрешается взять один камень из любой кучки или по камню из каждой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б) Кроме ходов, допустимых в пункте а), разрешается перекладывать один камень из первой кучки во вторую. В остальном правила те же.

Задача 34. Имеется две кучки по 11 спичек. За ход можно взять две спички из одной кучки и одну из другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 35. Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до 9. Выигрывает тот, кто получит число 100.

Задача 36. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000.

Задача 37. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000.

Задача 38. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое не превосходящее его натуральное число, являющееся степенью двойки ($1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.

Задачник первого года

Как уже отмечено в предисловии, в первой части представлены основные темы занятий кружка первого года обучения (примерно 6–7 классы). Однако они, конечно, не исчерпывают всего многообразия тем, доступных школьникам этих параллелей. В этой главе мы попробуем частично ликвидировать создавшийся пробел.

Хотелось бы также подчеркнуть, что нельзя строить занятие кружка, используя только задачи «на тему». Необходимы также нестандартные задачи, для решения которых нужно придумать что-то новое, изобрести свежую идею или просто преодолеть какие-то технические трудности. Не обойтись без подобных задач и при составлении олимпиад, матбоёв и т. д. Такие задачи мы и постарались собрать в этой главе.

§ 1. Логические задачи

Главная цель занятий со школьниками 6–7 классов — научить их последовательно мыслить: не путать причину со следствием, тщательно проводить перебор, правильно строить цепочку рассуждений. Для этого очень полезны логические задачи.

1. Петина мама сказала: «Все чемпионы хорошо учатся». Петя говорит: «Я хорошо учусь. Значит, я чемпион». Правильно ли он рассуждает?

2. На столе лежат 4 карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне карточки — гласная буква»?

3. В кошельке лежат две монеты на общую сумму 15 рублей. Одна из них не 5 рублей. Что это за монеты?

4. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

а) среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;

б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

5. В Стране чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

* * *

6. В коробке с карандашами есть карандаши разной длины и есть карандаши разного цвета. Докажите, что есть два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине.

7. В трёх урнах лежат шары: в одной — два белых, в другой — два чёрных, в третьей — белый и чёрный. На урнах висят таблички: ББ, ЧЧ и БЧ — так, что содержимое каждой из урн не соответствует табличке. Как, вытащив один шар, определить, в какой урне что лежит?

8. Трёх людей — *A*, *B* и *C* — усадили в ряд так, что *A* видит *B* и *C*, *B* видит только *C*, а *C* никого не видит. Затем им показали 5 колпаков — 3 красных и 2 белых, завязали глаза и надели каждому на голову красный колпак. После этого им развязали глаза и каждого спросили, может ли он определить цвет своего колпака. После того как *A*, а затем и *B* ответили отрицательно, C понял, какого цвета на нём колпак. Как он рассуждал?

9. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас блондин, другой — брюнет, а третий — рыжий и при этом ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии», — заметил черноволосый. «Ты прав», — сказал Белов. Определите цвет волос художника.

* * *

В следующих восьми задачах действие происходит на острове, коренными жителями которого являются рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

10. Человек говорит: «Я лжец». Является ли он уроженцем острова рыцарей и лжецов?

11. Какой вопрос нужно задать на острове аборигену, чтобы узнать, куда ведёт интересующая нас дорога — в город лжецов или в город рыцарей?

12. Какой вопрос нужно задать аборигену, чтобы узнать, живёт ли у него дома ручной крокодил?

13. Представьте себе, что на языке острова слова «да» и «нет» звучат как «тип» и «топ», но неизвестно, какое именно слово что означает. Как, задав аборигену один вопрос, выяснить у него, лжец он или рыцарь?

14. Какой вопрос нужно задать аборигену, чтобы он обязательно ответил «тип»?

15. Островитянин *A* в присутствии другого островитянина B говорит: «По крайней мере один из нас — лжец». Кто такой *A* и кто такой *B*?

16. Есть три человека: *A*, *B* и *C*, про которых известно, что один из них рыцарь, другой — лжец, а третий — приезжий, нормальный человек, который может и говорить правду, и лгать.

A говорит: «Я нормальный человек».

B говорит: «*A* и *C* иногда говорят правду».

C говорит: «*B* — нормальный человек».

Кто из них лжец, кто рыцарь, а кто нормальный человек?

17. Встретились несколько аборигенов, и каждый из них заявил всем остальным: «Вы все — лжецы». Сколько рыцарей могло быть среди этих аборигенов?

§ 2. Конструкции и взвешивания

На занятиях кружка полезно предлагать задачи, решением которых является конкретная конструкция, т. е. построение примера. При этом важно объяснить школьникам, что подобное построение действительно является решением задачи, в которой нужно ответить на вопрос: «Можно ли…?» Следует также отметить, что такие задачи обычно вызывают интерес у школьников 6–7 классов и решаются ими с удовольствием.

18. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

19. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую — опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

20. За один ход разрешается либо заменить число, написанное на доске, на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 458. Как за несколько ходов получить число 14?

21. В ряд выложены карточки, на которых написаны числа 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3. Разрешается взять несколько подряд лежащих карточек и переставить их в обратном порядке. Можно ли за три такие операции добиться расположения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

22. В клетках таблицы 4 × 4 расставлены числа от 1 до 16 так, как показано на рис. 52. Разрешается прибавить единицу одновременно ко всем числам любой строки или вычесть единицу из всех чисел любого столбца. Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, приведённую на рис. 53?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 52

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Рис. 53

23. Можно ли натуральные числа от 1 до 100 выписать в строчку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитают меньшее) была не меньше 50?

24. Разложите гири с весами $1, 2, 3, \ldots, 555$ на три кучи, равные по весу.

25. В клетках таблицы 4 × 4 расставьте числа, не равные нулю, так, чтобы сумма чисел, стоящих в углах любого квадрата 2 × 2, 3 × 3 или 4 × 4, была равна нулю.

26. Можно ли на рёбрах куба расставить числа от 1 до 12 так, чтобы все суммы чисел на гранях были одинаковы?

27*. Можно ли расставить числа от 0 до 9 (каждое по разу) в кружках на рис. 54 так, чтобы все суммы в вершинах заштрихованных треугольников были одинаковы?

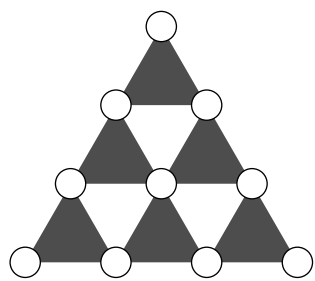


Рис. 54

28. Докажите, что в 400-значном числе 84198419 … 8419 можно вычеркнуть не-

сколько цифр в начале и в конце так, чтобы сумма оставшихся цифр была равна 1984.

29. Найдите хотя бы одно двузначное число, сумма цифр которого не меняется при умножении на любое однозначное число.

30. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 7?

31. Существуют ли несколько положительных чисел, сумма которых равна 1, а сумма их квадратов меньше 0,01?

32. Замок состоит из 64 одинаковых квадратных комнат, имеющих по двери в каждой стене и расположенных в виде квадрата 8×8. Полы в комнатах покрашены в белый цвет. Каждое утро маляр совершает прогулку по замку, причём, проходя через комнату, он перекрашивает пол в ней из белого цвета в чёрный, а из чёрного — в белый. Возможно ли, что когда-нибудь полы в замке окажутся покрашенными в шахматном порядке в чёрный и белый цвета?

33. Как расположить на плоскости стола несколько одинаковых монет, чтобы каждая из них касалась ровно трёх других?

34. На складе в два штабеля сложены в произвольном порядке N контейнеров, которые имеют номера $1, 2, \ldots, N$. Автопогрузчик подъезжает к одному из штабелей, снимает сверху несколько контейнеров и устанавливает их на другой штабель. Докажите, что за $2N - 1$ таких операций можно расположить все контейнеры в одном штабеле по порядку номеров.

* * *

К конструктивным задачам естественно примыкает цикл задач на взвешивания. Решая эти задачи, не забывайте проверять, что разобраны все возможные варианты, не ограничиваясь туманными и совершенно неудовлетворительными рассуждениями вроде «…рассмотрим наихудший случай…».

Во всех задачах этого цикла, если не оговорено противное, под взвешиванием понимается взвешивание на чашечных весах без стрелки и без гирь; все фальшивые монеты весят одинаково и все настоящие монеты весят одинаково.

35. Есть 9 монет, одна из которых фальшивая (она легче настоящих). За два взвешивания определите фальшивую монету.

36. Есть 10 мешков с монетами. Один из них целиком заполнен фальшивыми монетами, которые на один грамм легче настоящих. За одно

взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, определите «фальшивый» мешок.

37. Имеется 101 монета. Среди них 100 настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать при помощи двух взвешиваний?

38. Есть 6 монет, из которых две фальшивые, весящие меньше настоящих. За 3 взвешивания определите обе фальшивые монеты.

39. Есть 10 мешков, некоторые из которых целиком заполнены фальшивыми монетами, а все остальные — настоящими. Фальшивая монета на один грамм легче настоящей. Про один из мешков точно известно, что он наполнен настоящими монетами. За одно взвешивание на весах со стрелкой определите все «фальшивые» мешки.

40. Есть 5 монет, из которых три настоящие, одна фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

41. Имеется 68 монет, различных по весу. За 100 взвешиваний найдите самую тяжёлую и самую лёгкую монеты.

42. Есть 64 камня с различными весами. За 68 взвешиваний найдите два самых тяжёлых камня.

43. Имеется 6 гирь: по паре зелёных, красных и белых. В каждой паре одна гиря тяжёлая, а другая — лёгкая, причём все тяжёлые гири весят одинаково и все лёгкие гири весят одинаково. За 2 взвешивания определите все 3 тяжёлые гири.

44. Есть 6 монет, из которых две фальшивые, тяжелее настоящих на 0,1 грамма. Есть весы, которые реагируют только на разность весов на чашках, не меньшую 0,2 грамма. Как найти обе фальшивые монеты за 4 взвешивания?

45. а) Есть 16 монет, одна из которых фальшивая, однако неизвестно, в какую сторону она отличается от настоящей по весу. За 4 взвешивания определите фальшивую монету.

б)* Есть 12 монет, одна из которых фальшивая, однако неизвестно, в какую сторону она отличается от настоящей по весу. За 3 взвешивания найдите эту монету.

46*. В качестве вещественного доказательства суду были предъявлены 14 монет. Суд знает, что из них 7 монет настоящие, а остальные 7 монет фальшивые, весящие меньше настоящих. Адвокат обвиняемого знает, какие именно монеты настоящие, а какие фальшивые, и хочет убедить в этом суд. Как ему это сделать всего за 3 взвешивания?

§ 3. Геометрические задачи

Задачи, помещённые в этом параграфе, естественно распадаются на два цикла. Первый цикл (задачи 47–57) является продолжением предыдущего параграфа: он также посвящён конструированию, только на этот раз — геометрических объектов. Второй цикл составляют «обычные» геометрические задачи.

47. Нарисуйте 4-звенную ломаную, проходящую через 9 точек, изображённых на рис. 55.

48. Как разрезать квадрат на 5 прямоугольников, чтобы никакие два из них не имели общей стороны?

49. Можно ли нарисовать замкнутую 8-звенную ломаную, которая пересекает каждое своё звено ровно один раз?

Рис. 55

50. Можно ли разрезать квадрат на несколько тупоугольных треугольников?

51. Верно ли, что среди любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

52. Король хочет построить 6 крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только три перекрёстка и на каждом из них пересекались только две дороги.

53. Можно ли расположить на плоскости 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена ровно с четырьмя другими?

54. Замостите плоскость одинаковыми 5-угольниками.

55. Разрежьте прямоугольник 3×9 на 8 квадратов.

56. Докажите, что квадрат можно разрезать на 1989 квадратов.

57. Как разрезать произвольный треугольник на 3 части, из которых можно сложить прямоугольник?

* * *

58. Точка M находится на стороне AB, а точка K — на стороне BC треугольника ABC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что если $OM = OK$ и равны углы KAC и MCA, то треугольник ABC равнобедренный.

59. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CH и медиана BK, причём $BK = CH$, а также равны углы KBC и HCB. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

60. Высота AK, биссектриса BH и медиана CM треугольника ABC пересекаются в одной точке O, причём $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

61. В шестиугольнике $ABCDEF$ треугольники ABC, ABF, FED, FEA, CDB, CDE равны. Докажите, что равны диагонали AD, BE, CF.

62. В точке O пересекаются диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Периметры треугольников ABC и ABD равны. Равны и периметры треугольников ACD и BCD. Докажите, что $AO = BO$.

63. В треугольнике с разными углами все длины сторон — целые числа. Докажите, что периметр этого треугольника не меньше 9.

§ 4. Задачи с целыми числами

Теме «целые числа» уже посвящена одна глава нашего сборника — «Делимость и остатки». Но хороших и разных задач, связанных с целыми числами, так много, что мы сочли необходимым собрать некоторые из них в этом параграфе. В частности, цикл задач 70–84 является непосредственным дополнением к упомянутой главе. Большинство других задач выходит за рамки темы «Делимость».

64. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они потратят вместе на одну копейку меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок. Известно, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько?

65. 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125 Болтаев, но дешевле, чем 126 Болтаев. Докажите, что на трёх Шалтаев и одного Болтая рубля не хватит.

66. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с двумя мальчиками. При этом в классе всего 19 парт и 31 пионер. Сколько в классе учеников?

67. Две команды разыграли первенство школы в десяти видах спорта, причём за победу команда получала 4 очка, за ничью — 2 и за проигрыш — 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

68. Четверо товарищей купили вместе лодку. Первый внёс половину суммы, внесённой остальными; второй — треть суммы, внесённой остальными; третий — четверть суммы, внесённой остальными, а четвёртый внёс 130 рублей. Сколько стоит лодка и сколько внёс каждый?

69. На дороге, соединяющей два аула, нет горизонтальных участков. Автобус идёт в гору всегда со скоростью 15 км/ч, а под гору — 30 км/ч. Найдите расстояние между аулами, если известно, что путь туда и обратно автобус проезжает за 4 часа.

* * *

70. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что $ab(a-b) = 45045$?

71. Обозначим сумму трёх последовательных натуральных чисел через a, а сумму трёх следующих за ними натуральных чисел — через b. Может ли произведение ab равняться 111111111?

72. Докажите, что последняя ненулевая цифра числа 1985! чётна.

73. Докажите, что при любом натуральном $n > 2$ между числами n и $n!$ есть хотя бы одно простое число.

74. Существуют ли такие целые числа a и b, отличные от нуля, что одно из них делится на их сумму, а другое — на их разность?

75. Простые числа p и q и натуральное число n удовлетворяют соотношению $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$. Найдите эти числа.

76. Докажите, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из одной единицы, двух двоек, трёх троек, …, девяти девяток, не может быть точным квадратом.

77. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd$ равно 1 или -1.

78. В стране Анчурии в обращении имеются купюры четырёх достоинств: 1 доллар, 10 долларов, 100 долларов, 1000 долларов. Можно ли отсчитать миллион долларов так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

79. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

80. Докажите, что число 3999991 не является простым.

81. а) Найдите какое-нибудь семизначное число, все цифры которого различны и которое делится на все эти цифры.

б) Существует ли такое восьмизначное число?

82. У числа 19^{100} вычисляют сумму цифр, после этого у полученного числа подсчитывают сумму цифр и т. д., до тех пор пока не получится однозначное число. Какое оно?

83. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — простое число или единица.

84. Существует ли натуральное число, произведение цифр которого равно 1980?

* * *

85. Некоторое число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, то число удвоится. Найдите наименьшее такое число.

86. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причём $\overline{abc} - \overline{def}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

87. Найдите минимальное натуральное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

88. Дано трёхзначное число, у которого первая и последняя цифры различаются не менее чем на 2. Составляется разность этого числа и числа, ему обращённого (т. е. числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке). К результату прибавляется число ему обращённое. Докажите, что полученная сумма равна 1089.

* * *

89. Что больше: 2^{300} или 3^{200}?

90. Что больше: 31^{11} или 17^{14}?

91. Что больше: 50^{99} или 99!?

92. Что больше: $888\ldots88 \times 333\ldots33$ или $444\ldots44 \times 666\ldots67$ (каждое из чисел записано 1989 цифрами)?

93. Каких шестизначных чисел больше: тех, которые представляются в виде произведения двух трёхзначных чисел, или остальных?

* * *

94. Дано несколько одинаковых картонных треугольников. В вершинах каждого из них написаны числа 1, 2 и 3. Треугольники сложены в ровную стопку. Может ли оказаться так, что суммы чисел вдоль каждого вертикального ребра стопки равны 55?

95. Можно ли расположить по окружности 15 целых чисел так, чтобы сумма любых четырёх чисел подряд равнялась 1 или 3?

96*. Найдите тысячу таких натуральных чисел, что их сумма равна их произведению.

97. Подряд выписаны числа 2^{1989} и 5^{1989}. Сколько всего выписано цифр?

98. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых его трёх цифр равна сумме трёх последних. Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой всех шести цифр, равной 27.

§ 5. Смесь

99. В классе 14 человек занимаются английским языком, 8 человек — французским. Трое учеников при этом изучают оба языка. Сколько учеников в классе, если известно, что каждый изучает хотя бы один язык?

100. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр друг от друга.

101. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок ненулевой длины, середина и концы которого окрашены в один цвет.

102. Квадрат 8×8 сложен из доминошек 1×2. Докажите, что какие-то две из них образуют квадрат 2×2.

103. Числа, записанные в таблице 3×3, разрешается изменять следующим образом: прибавить по единице к каждому из чисел любого квадратика 2×2. Можно ли из таблицы, заполненной одними нулями, получить таблицу, изображённую на рис. 56?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

Рис. 56

104. Автобус назовём переполненным, если в нём больше 50 пассажиров. Едет колонна автобусов. Может ли процент переполненных автобусов быть больше, чем процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах?

105. Варианты городской олимпиады для 6–11 классов составляются так, что в каждом из них по 8 задач и в каждом варианте есть ровно три задачи, которые встречаются в других классах. Какое максимально возможное количество задач могло использовать жюри?

106. Учащиеся школы построены прямоугольным каре. После этого в каждой колонне выбрали самого высокого школьника и из них выбрали самого низкого — им оказался Петя Иванов. Затем в каждой шеренге выбрали самого низкого школьника и из них выбрали самого высокого — им оказался Ваня Петров. Кто выше — Ваня или Петя?

107. 30 стульев стоят в ряд. Время от времени подходит человек и садится на один из свободных стульев. При этом один из его соседей (если такие есть) встаёт и уходит. Какое максимальное число стульев может оказаться занятым, если исходно а) все стулья свободны; б) 10 стульев из 30 заняты?

108. В вершинах пятиугольника стоят рядом три фишки. Любую фишку разрешается сдвинуть вдоль диагонали на любое свободное поле. Можно ли получить такую позицию, в которой одна фишка осталась бы на старом месте, а две другие поменялись бы местами?

109. Среди чисел a, b, c, d, e, f нет равных нулю. Докажите, что среди чисел $ab, cd, ef, -ac, -be, -df$ есть и положительные, и отрицательные.

110*. Рубик разрубает свой кубик $3 \times 3 \times 3$ на маленькие кубики. Сколько раз ему необходимо махнуть топором, чтобы это сделать, если наложения кусков кубика друг на друга при разрубании разрешены?

111. Клетки тетрадного листа раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдётся фигура вида, указанного на рис. 57, которая содержит две клетки одного цвета.

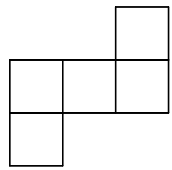


Рис. 57

112. Дан шестизначный телефонный номер. Из скольких семизначных номеров его можно получить вычёркиванием одной цифры?

113. Сколько билетов подряд надо приобрести в автобусной кассе, чтобы наверняка попался счастливый? (Билет называется счастливым, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних; количество билетов в рулоне не ограничено.)

114. Дан клетчатый прямоугольник 20×30. Можно ли провести прямую, пересекающую внутренности 50 клеток?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Глава 9

Индукция

(И. С. Рубанов)

§ 1. Процесс и метод индукции

Введение (для преподавателей)

Наверное, каждому приходилось выстраивать в ряд костяшки домино. Толкнёшь первую — она повалит вторую, та — третью, и так до тех пор, пока не упадут все. Заменим ряд доминошек бесконечным рядом утверждений $У_1, У_2, У_3, \ldots$, занумерованных натуральными числами. Пусть мы умеем доказывать, что:

- (Б) первое утверждение ряда истинно;
- (П) из истинности любого данного утверждения ряда вытекает истинность следующего за ним утверждения.

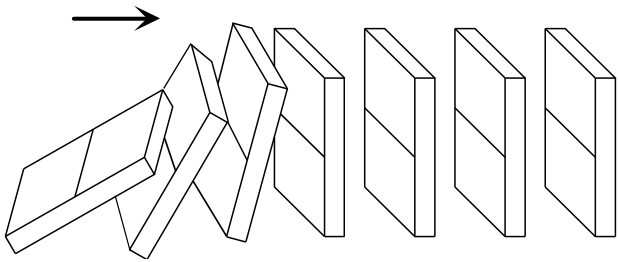


Рис. 58

Тогда нами доказаны все утверждения ряда. В самом деле, мы умеем «толкать первую доминошку» — доказывать первое утверждение, а (П) означает, что «каждая доминошка, падая, валит следующую». Какую бы «доминошку»-утверждение мы ни взяли, волна «падений»-доказательств, раз начавшись, рано или поздно дойдёт до неё, т. е. утверждение будет доказано.

Мы описали схему метода математической индукции (ММИ). Теорема (Б) здесь называется базой индукции, а теорема (П) — индукционным переходом. Рассуждение с утверждениями-«доминошками» показывает, что переход (П) есть краткая запись цепочки теорем, изображённой на рисунке:

$$У_1 \to У_2 \to У_3 \to \ldots \to У_k \to У_{k+1} \to \ldots$$

Теоремы этой цепочки мы будем называть шагами, а процесс их последовательного доказательства — процессом индукции. Наглядно процесс индукции можно представить как волну доказательств, бегущую от утверждения к утверждению по цепочке теорем.

Психологически суть индукции — именно в её процессе. Как научить (или научиться) проводить его, мы показываем в форме диалога между преподавателем («П») и учеником («У»), который в несколько приглаженном виде отражает реальное занятие кружка. В конце первой части диалога приведены методические комментарии для читателя-преподавателя (ссылки на них даны в тексте).

* * *

П: **Задача 1.** Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

У: Всё просто — в уголке три клетки, а $16^2 - 1$ делится на 3.

П: Если всё так просто, разрежьте заодно на уголки полоску 1×6 — ведь 6 тоже делится на 3.

У: Да… Значит, так рассуждать нельзя. Тогда я не знаю, как решать. (См. комментарий № 1.)

П: Вы не можете решить эту задачу. Но, может быть, вы сможете придумать и решить более простую задачу, подобную этой?

У: Можно взять квадрат поменьше, например 4×4.

П: Или 2×2. (См. комментарий № 2.)

У: Для 2×2 и доказывать нечего — после удаления любой клетки остаётся как раз уголок. Но что это даёт?

П: А вы попробуйте теперь решить задачу про 4×4.

У: Квадрат 4×4 можно разрезать на четыре квадрата 2×2. С тем из них, в котором вырезанная клетка, всё ясно. А что делать с тремя другими?

П: Попробуйте вырезать из них уголок, примыкающий к центру большого квадрата (рис. 59).

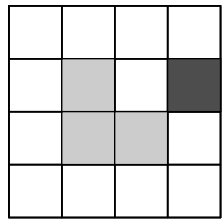


Рис. 59

У: Понял! Каждый из трёх квадратов 2×2 потеряет по клетке и тоже превратится в уголок! Задача для квадрата 4×4 решена. Но что дальше?

П: Попробуйте взять квадрат 8×8. Его можно разрезать на четыре квадрата 4×4. Попробуйте это использовать.

У: Можно рассуждать так же, как и перед этим. В одном из квадратов 4×4 — вырезанная клетка. Его, как уже доказано, можно разрезать на уголки. А из трёх оставшихся вырежем уголок, примыкающий к центру квадрата 8×8. Тогда они потеряют по одной клетке, и мы тоже сможем разрезать их на уголки.

П: Видно ли теперь, как решить исходную задачу?

У: Да. Разрежем квадрат 16×16 на четыре квадрата 8×8. В одном из них — вырезанная клетка. Мы только что доказали, что его можно разрезать на уголки. А из трёх оставшихся вырежем уголок, примыкающий к центру квадрата 16×16. Теперь каждый из них тоже можно разрезать на уголки. Всё!

П: Нет, не всё. Мы решили задачу про квадрат 16×16, наведя к ней «мосты» от более простых аналогичных задач. А нельзя ли теперь от неё самой «навести мосты» к более сложным подобным задачам? (См. комментарий № 3.)

У: Пожалуйста. Докажем, что на уголки можно разрезать квадрат 32×32 без клетки. Для этого разрежем его на четыре квадрата 16×16, удалим центральный уголок и используем уже доказанное утверждение про квадрат 16×16.

П: Так ведь можно и дальше идти!

У: Конечно. Из разрезаемости квадрата 32×32 можно так же получить разрезаемость квадрата 64×64, из неё — квадрата 128×128 и т. д.

П: То есть получается бесконечная цепочка аналогичных утверждений про квадраты разных размеров. А можно ли сказать, что мы доказали все их?

У: Да. Сначала мы доказали первое утверждение цепочки — про квадрат 2×2. Затем вывели из него второе, из второго — третье,

из третьего — четвёртое, и так можно продолжать до бесконечности. Ясно, что,

идя так по цепочке, мы дойдём до каждого из её утверждений. Значит, все они верны.

П: Верно. Мне представляется сейчас такая картина: по цепочке утверждений и теорем

$$2 \times 2 \to 4 \times 4 \to 8 \times 8 \to \ldots$$

бежит «волна доказательств». Ясно, что она добежит до каждого утверждения цепочки.

Методические замечания. Сделаем несколько замечаний в связи с только что произошедшим диалогом.

Комментарий № 1. В тот момент, когда ученик «доказал» утверждение задачи при помощи делимости на 3, перед преподавателем возникла обычная проблема — как объяснить ученику его ошибку, одновременно не сделав ему существенной подсказки. Преподаватель решает её при помощи заранее заготовленного контрпримера. Такие «подводные камни» и способы борьбы с ними всегда полезно знать загодя. Обходить «камни» надо непринуждённо, минимально отвлекаясь от главной линии решения.

Комментарий № 2. Эта реплика вставлена в текст не случайно. Тривиальный случай 2×2 ученик вряд ли назовёт сам — для него это «не задача» (мы ещё не раз столкнёмся с этим психологическим моментом). Однако преподаватель знает, что с этого случая начинать удобнее.

Комментарий № 3. В этой части диалога наглядно возникает «пошаговая» схема проведения решения:

$$2 \times 2 \to 4 \times 4 \to 8 \times 8 \to 16 \times 16\,.$$

Перед нами — начало процесса индукции: база 2×2 и три первых шага. Существенно, что сделано достаточно шагов индукции, чтобы ученик заметил аналогию между ними. Теперь, после наводящего вопроса, он легко сможет сам развернуть процесс индукции целиком.

Заметим, что существует ещё несколько индукционных решений этой задачи, но они невыгодны нам, ибо процесс индукции не раскрывается в них так чётко, как в приведённом примере. Поэтому преподаватель отвлекает от них целенаправленной подсказкой. И вообще, обратите внимание на то, как преподаватель точно ведёт свою «партию»: где нужно, он незаметно направляет ученика на нужный путь, отвлекает от ложной аналогии, помогает сэкономить силы. При этом очень важна ненавязчивость: одно из главных правил гласит — ученик должен как можно бóльшую часть пути пройти сам.

Подведём промежуточный итог: ученик (а чаще это делает сам преподаватель) изложил схему метода математической индукции (ММИ). Выделенная фраза «идя так по цепочке, мы дойдём до каждого из её утверждений» — вольная формулировка принципа математической индукции, лежащего в основе ММИ. С точной его формулировкой вы сможете познакомиться по любой из книг [97, 99, 100]. Но заметим, что давать её в начале обучения чаще всего нецелесообразно, а нередко и вредно. Формализация интуитивно ясного утверждения может вызвать у добросовестного ученика чувство непонимания и породить неуверенность. Напротив, надо всеми средствами делать схему ММИ живее и нагляднее. Кроме «волны» и «доминошек» из введения тут полезны аналогии с ходьбой по лестнице, застёжкой-молнией и т. п.

* * *

Продолжим ещё немного прерванный диалог.

П: Итак, мы доказали бесконечный ряд утверждений о разрезаемости квадратов. Теперь давайте запишем его целиком, без «и т. д.».

У: Так ведь никакой тетради не хватит.

П: Да, если писать каждое утверждение отдельно. Но ведь утверждения-то одинаковы, меняются только размеры квадратов. Это позволяет целиком закодировать нашу цепочку одной строкой:

(∗) квадрат $2^n \times 2^n$ без одной клетки можно разрезать на уголки.

Здесь есть переменная n. Любое утверждение нашей цепочки можно получить, если подставить на место переменной число, равное номеру утверждения в цепочке. Например, утверждение про квадрат 32×32 получится при $n = 5$. А как выглядит десятое утверждение цепочки?

У: Подставим $n = 10$. Получится утверждение про квадрат $2^{10} \times 2^{10}$, т. е. 1024×1024.

П: Посмотрите: привычная вещь — переменная, а какая могучая — бесконечную цепочку позволяет свернуть в одну строку. Что же это такое — «переменная»?

У: Ну… это буква… неизвестное…

П: Запомните: эта буква обозначает просто пустое место, точнее «рамку», куда можно помещать различные числа. По-английски она иногда выразительно называется «placeholder», т. е. «местодержатель». Числа, которые разрешается подставлять на место переменной, называются её значениями. Так, значениями переменной n в утверждении (∗) служат натуральные числа. Именно благодаря этому фраза (∗) заменяет бесконечную цепочку утверждений.

А теперь вспомним, как мы доказывали, что все утверждения цепочки (∗) верны. Обозначим их по порядку: $У_1$ — про квадрат 2×2, $У_2$ — про 4×4, и т. д. Сначала мы доказали утверждение $У_1$, а потом — бесконечную цепочку однотипных теорем: если верно $У_1$, то верно и $У_2$; если доказано $У_2$, то верно и $У_3$; если доказано $У_3$, то верно и $У_4$ и т. д. Давайте попробуем закодировать и эту цепочку: «Для каждого натурального n…

У: …если доказано $У_n$, то верно и $У_{n+1}$».

П: А теперь расшифруем эту фразу: что означают $У_n$ и $У_{n+1}$?

У: Получается так:

(∗∗) какое бы натуральное n ни взять, если уже доказано, что квадрат $2^n \times 2^n$ без клетки можно разрезать на уголки, то верно и то, что квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ без клетки можно разрезать на уголки.

П: А вы можете доказать полученную общую теорему?

У: Пожалуй. Разрежем квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ на четыре квадрата $2^n \times 2^n$. В одном из них — выброшенная клетка. Его можно разрезать на уголки по условию. Из трёх других удалим по клетке, вырезав уголок, примыкающий к центру исходного квадрата, а потом снова используем условие теоремы.

П: Верно. Заметьте теперь, что, доказав общую теорему (∗∗), вы доказали сразу все однотипные теоремы закодированной ею цепочки. Например, заменив в вашем рассуждении переменную n числом 1, получим уже знакомое нам доказательство того, что из разрезаемости квадрата 2×2 следует разрезаемость квадрата 4×4 и т. д. Таким образом, если (∗∗) — закодированная цепочка теорем, то ваше рассуждение — закодированная «волна доказательств» этих теорем. Думаю, вы поняли: цепочку однотипных теорем выгоднее доказывать именно в таком свёрнутом виде. Но для этого, конечно, надо сначала научиться записывать их в таком виде.

* * *

Метод, которым мы решили задачу 1, и называется МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. В чём его суть?

Во-первых, мы рассмотрели утверждение (∗) не как единый факт, а как бесконечный ряд однотипных утверждений.

Во-вторых, мы доказали первое из них — оно называется базой индукции.

В третьих, мы вывели из первого утверждения второе, из него тем же способом — третье и т. д. до бесконечности. Это был индук-

ционный переход; (∗∗) — его краткая (свёрнутая) запись. Поскольку от базы шагами индукции можно дойти до любого из наших утверждений, все они оказываются доказанными.

* * *

Метод есть идея, применённая дважды.

Д. Пойа

Для успешного освоения ММИ обычно приходится проигрывать изложенный выше сценарий на нескольких задачах. Задачи, пригодные для этой цели, мы будем называть ключевыми. Одну из таких задач мы разобрали выше. Рассмотрим теперь ещё четыре.

Задача 2. Докажите, что число 111 … 11 (243 единицы) делится на 243.

Указание. Задача обобщается до утверждения, что число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n. База: 111 делится на 3. Ученики обычно начинают с утверждения, что 111111111 делится на 9, — наша база для них «не задача». Есть два «подводных камня»: попытка по аналогии с признаками делимости[1] на 3 и на 9 использовать неверный «признак» делимости на 27 и рассуждения типа «если число делится на 3 и на 9, то оно делится на 27».

Нужный тип перехода: разделить число, записанное 3^{n+1} единицами на число, записанное 3^n единицами, и убедиться в том, что частное делится на 3.

Задача 3. Докажите, что при каждом натуральном n начиная с 4 существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

Указание. Эту задачу целесообразно давать, если ученики уже знают, что у выпуклого многоугольника не может быть более трёх острых углов. База — $n = 4$ — проверяется прямым построением.

Переход: «отпилим» один из тупых углов, число углов возрастёт на один, а острые углы сохранятся (рис. 60). Переход с «пристраиванием» угла к одной из сторон сложнее. Есть и побочные решения (с использованием вписанных многоугольников и др.), но от них легко отвлечь идеей отрезания угла. Утверждение задачи верно, конечно, и при $n = 3$, но нам

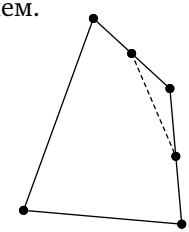


Рис. 60

[1] См. главу «Делимость-2» этого сборника.

невыгодно начинать индукцию с тройки, ибо перейти от $n = 3$ к $n = 4$ описанным выше способом нельзя.

Задача 3 даёт пример построения по индукции. Подробнее об этом см. в [100].

Задача 4 (игра «Ханойская башня»). У Пети есть детская пирамидка с n кольцами и два пустых стержня той же высоты (рис. 61). Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

а) Петя сможет переложить все кольца на один из пустых стержней;

б) он сможет сделать это за $2^n - 1$ перекладываний;

в)* меньшим числом перекладываний ему обойтись не удастся.

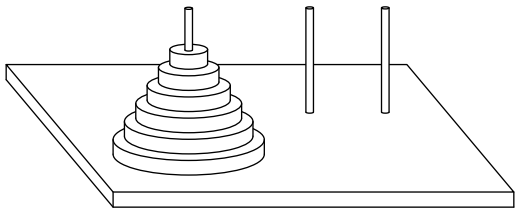


Рис. 61

Указание. а), б) База очевидна.

Переход. Пусть мы умеем перекладывать k колец за $2^k - 1$ ходов. Возьмём $k + 1$ кольцо. За $2^k - 1$ ходов переложим все кольца, кроме нижнего, на третий стержень. Затем нижнее положим на второй. Потом за $2^k - 1$ ходов переложим все остальные кольца с третьего стержня на второй. Всего получится $(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1$ ходов. Советуем в начале провести несколько шагов индукции «вручную».

в) Эту задачу следует давать выборочно: по трудности этот пункт уже не ключевой. Идея доказательства перехода: чтобы переложить самое нижнее кольцо на второй стержень, надо сначала все остальные переложить на третий.

Задача 5. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы.)

Указание. Здесь мы сталкиваемся с новой трудностью: в условии задачи отсутствует явное указание на индуктивную переменную. Решение

надо начинать с её выявления. Для этого можно переформулировать условие: «На плоскости проведено n прямых…». Далее идёт база — $n=1$ или $n=0$ — по вкусу. Переход: убираем $(k+1)$-ю прямую, раскрашиваем полученную карту, снова проводим убранную прямую и перекрашиваем в противоположный цвет все области с одной стороны от неё.

Для преподавателей. Несколько слов о работе с ключевыми задачами. Первые одна-две задачи (обычно это задачи 1–2) обсуждаются по сценарию приведённого выше диалога — выращивание цепочки из одного частного утверждения. Тут ученики должны понять суть процесса индукции и усвоить связь между цепочками утверждений и предложениями с натуральными переменными. С недостаточно подготовленными школьниками свёртку цепочки шагов индукции на этом этапе можно не проводить. Она отрабатывается на втором этапе обучения, цель которого — научить ребят работать с переходом в свёрнутом виде. Задачи здесь разумно предлагать сразу в общем виде, как задачи 3 и 4 выше. В них цепочка утверждений уже дана и решение начинается с её развёртывания, примерно так: «Перед нами свёрнутая цепочка утверждений. Как звучит первое из них? Пятое? 2020-е?» Но цепочка шагов индукции по-прежнему выращивается и сворачивается по отработанной выше схеме, пока ученики не усвоят прочно связь развёрнутой цепочки с её свёрнутой записью.

* * *

Подводя итоги решения ключевых задач, полезно дать ученикам чёткий

План решения задачи методом математической индукции

1. Найдите в условии ряд однотипных утверждений — развёрнутый или свёрнутый в предложение с переменной. Переменная может быть замаскирована. Тогда выявите её, переделав формулировку условия. Если цепочки нет, попробуйте вырастить её так, чтобы задача оказалась в её составе.
2. Докажите первое утверждение ряда (базу индукции).
3. Докажите, что при каждом натуральном n из справедливости n-го утверждения ряда вытекает справедливость $(n+1)$-го утверждения (индукционный переход).
4. Если база и переход доказаны, то доказаны и все утверждения ряда, ибо до каждого из них можно дойти от базы шагами перехода.

Последний пункт во всех задачах проводится одинаково. Поэтому его обычно не проводят, а просто подразумевают. Но знать его необходимо. Обычно не выделяют явно и первый пункт — поиск ряда утверждений. Для знающих ММИ это оправдано, но с начинающими мы настоятельно советуем проводить его по крайней мере до тех пор, пока это не станет для них само собой разумеющимся.

§ 2. ММИ и догадка по аналогии

Задача 6. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?

У: Попробуем действовать по плану. Есть ли в условии какая-нибудь цепочка? Кажется, да: на сколько частей делят плоскость одна прямая, две прямые, три прямые…? Пункт второй — база: одна прямая делит плоскость на две части.

П: Или ноль прямых — на одну часть.

У: Конечно. Пункт третий — переход…!?

П: Ваше недоумение оправдано: мы столкнулись с трудностью нового типа. В предыдущих задачах мы имели дело с цепочками утверждений. А тут цепочка есть, но не из утверждений, а из вопросов. Утверждения получатся, если дать на них ответы.

У: Но как?

П: Попробуйте угадать правило, по которому число частей $Ч_n$ зависит от n — числа прямых. Физики в таких случаях ставят эксперименты. Мы тоже можем «поэкспериментировать», найдя число частей при небольших значениях n вручную. Попробуйте.

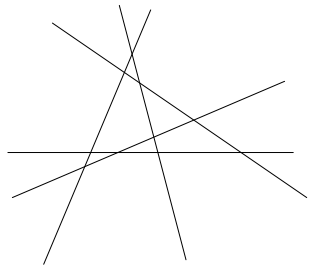


Рис. 62

У: Хорошо. Итак, $Ч_0 = 1$, $Ч_1 = 2$, $Ч_2 = 4$, $Ч_3 = 7$, $Ч_4 = 11$. Надо подумать… А, кажется, я догадался! С добавлением n-й прямой число частей увеличивается на n. Стало быть, $Ч_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$. Задача решена.

П: Нет, ещё не решена. Не забывайте, что на самом деле мы пока проверили это равенство только для $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Для других значений n это пока лишь догадка, основанная на предположении, что добавление n-й прямой увеличивает число частей на n. А вдруг она неверна? Гарантию может дать только доказательство.

У: …методом математической индукции.

П: Только сначала дополним план из § 1 таким пунктом.

1а. Если в задаче вместо цепочки утверждений — цепочка вопросов, замените их на предполагаемые ответы. Их можно угадать, «поэкспериментировав» с первыми вопросами цепочки. Но, угадав ответы, не забудьте их обосновать.

У: Я знаю, как обосновать нашу догадку. Базу мы уже проверили. А то, что при добавлении n-й прямой количество частей увеличится на n, доказывается просто: она пересекает старые прямые в $n-1$ точках и, значит, рассекает n старых кусков.

* * *

Догадка по аналогии, продемонстрированная нам только что, — это оружие острое, но и опасное: велико искушение принять лишь угаданную закономерность за уже доказанную. Хорошим лекарством от такого заблуждения служат задачи, где напрашивающаяся догадка оказывается неверной. Вот два примера.

Задача 7. Верно ли, что число n^2+n+41 простое при любом натуральном n?

Комментарий. Неверно: $40^2+40+41=41^2$, $41^2+41+41=41\cdot 43$. Но тот, кто попытается угадать ответ, «экспериментируя» с небольшими значениями n, рискует прийти к противоположному выводу, ибо при всех n от 1 до 39 получаются простые числа. Этот знаменитый пример принадлежит Леонарду Эйлеру.

Задача 8. На окружности взяли n точек и соединили их всевозможными отрезками. Оказалось, что никакие три из этих отрезков не пересекаются в одной точке. На сколько частей они делят круг?

Комментарий. При $n=1,2,3,4,5$ получаем соответственно 1, 2, 4, 8, 16 частей. Напрашивается вывод, что при любом n количество частей равно 2^{n-1}. А на самом деле их будет

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)}{2}+1.$$

Другие примеры можно найти во введении к книге [99].

§ 3. Классические задачи

Среди классических задач на применение ММИ в элементарной математике можно выделить три большие группы: доказательство

тождеств, доказательство неравенств и задачи на делимость. Несмотря на кажущуюся простоту их решений при помощи метода математической индукции, здесь возникает и ряд препятствий как методического, так и психологического характера. Мы начнём с их обсуждения.

П: Поговорим ещё о задаче 6. Вам нравится запись ответа в виде $1+(1+2+3+\ldots+n)$?

У: Не очень. Выглядит довольно громоздко. И вообще, хорошо бы обойтись без многоточия.

П: Пожалуйста. Оказывается,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Это можно доказать методом математической индукции.

У: Но ведь для индукции нужен ряд утверждений, а тут — одна формула.

П: Посмотрите внимательно: в формуле есть переменная n. А это, как мы уже знаем, признак свёрнутого ряда. Подставьте, например, вместо n число 2020.

У: Получилось $1+2+\ldots+2020=\frac{2020\cdot 2021}{2}$.

П: То есть числовое равенство. Из них и состоит ряд, свёрнутый в нашу «формулу». Доказать её — значит убедиться, что все эти числовые равенства верны. Если это так, то про равенство с переменной, говорят, что оно «верно при всех допустимых значениях переменной» и называют его тождеством. Любое тождество с натуральной переменной можно пытаться доказать по индукции.

У: А если наше равенство при каких-то n окажется неверным?

П: Тогда оно не будет тождеством и доказать его не получится: не пройдёт доказательство базы или перехода. Строго говоря, чтобы отличить тождества от произвольных равенств с переменными, перед ними следовало бы писать фразы типа «для всякого натурального…, верно, что…», но этого обычно не делают. Имеется в виду, что читатель сам должен по смыслу текста понять, идёт ли речь об уже доказанном тождестве, или о тождестве только предполагаемом, или, например, об уравнении.

У: Что ж, применим ММИ. База: $n=1$. Надо доказать, что…

$$1+2+\ldots+1=\frac{1\cdot 2}{2}?!$$

П: Надо доказать, что $1=\frac{1\cdot 2}{2}$. Вас сбила с толку запись $1+2+\ldots+n$ (в целом вполне удобная). Дело в том, что при $n=1$ её «хвост» $2+\ldots+n$ на самом деле отсутствует.

У: База ясна. Перейдём ко второму равенству ряда. Надо доказать, что $1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$. Это легко: $3=3$. Теперь к третьему: $1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}$. Это тоже легко: $6=6$. К четвёртому… тоже легко. А дальше что? Так и будем проверять каждое тождество напрямую? Здесь ведь нет никакого перехода.

П: А вы попробуйте записать индукционный переход сразу в общем, свёрнутом виде.

У (подумав): Что-то и это не получается.

Для преподавателей. Человеку, хорошо владеющему ММИ, задачи на доказательство тождеств кажутся самыми простыми. Недаром они во всех пособиях идут первыми. Однако из нашего диалога видны два источника трудностей для ученика, впервые осваивающего применение ММИ к тождествам. Первое: тождество с одной натуральной переменной зачастую не воспринимается учащимися как цепочка утверждений. Одна из причин тут в том, что простые числовые равенства не воспринимаются учениками как самостоятельные утверждения. В самом деле, что содержательного в том, что

$$1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}=6?$$

И второе: на первых шагах здесь невозможно усмотреть общий вид индукционного перехода. Ведь в начале, например, при проверке равенств

$$1+2=\frac{2\cdot 3}{2},\quad 1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}\quad \text{и т. д.},$$

вы не переходите от одного равенства к другому, а просто проверяете их.

Именно поэтому тождества не могут быть ключевыми задачами, несмотря на свою простоту, и начинать с них обучение, как это часто предлагается, означает своими руками создавать себе проблемы (мы, конечно, не имеем в виду самых способных ребят — они усвоят метод на любых задачах, но только на них рассчитывать нельзя). А вот для закрепления ММИ тождества подходят очень хорошо, ибо доказательства здесь обычно несложны.

П: Хорошо, я помогу. Представьте себе, что мы делаем шаги индукции один за другим. Пусть эта «волна доказательств» уже дошла до утверждения с номером k. Как оно выглядит?

У: Получается

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \qquad (\#)$$

П: Совершенно верно. А теперь скажите, как выглядит следующее за ним утверждение — первое из тех, до которых «волна» ещё не дошла?

У: Здесь $n = k + 1$ и получается

$$1 + 2 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

П: Хорошо. Только давайте в стоящей слева краткой записи суммы вместе с последним слагаемым запишем ещё и предпоследнее:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2). \qquad (\#\#)$$

Теперь скажите, в чём будет состоять очередной шаг индукции.

У: Это-то понятно: в том, чтобы из (#) вывести (##).

П: А теперь представьте, что мы научились выводить (##) из (#) при каждом натуральном k. Тогда мы обоснуем все шаги перехода сразу. Получается, что теорема о переходе здесь состоит в том, что:

при каждом натуральном k из равенства

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

следует равенство

$$1 + 2 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Иначе говоря: дано равенство (#) — докажите равенство (##), если k — произвольное натуральное число. Для удобства доказательства давайте обозначим левые части равенств (#) и (##) через S_k и S_{k+1}.

У: Из (##) видно, что $S_{k+1} = S_k + (k+1)$ (вот зачем учитель записал и предпоследнее слагаемое!). Но мы уже знаем, что $S_k = k(k + 1)/2$. Отсюда получаем, что

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}k(k + 1) + (k + 1) = \frac{1}{2}[k(k + 1) + 2(k + 1)] = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2),$$

что и требовалось доказать.

П: Запомните полезную идею, с помощью которой был доказан переход: левая часть равенства (##) была выражена через левую часть равенства (#), а потом последняя была заменена на правую часть равенства (#).

Для преподавателей. Здесь появляется ещё одна связанная с тождествами трудность — ученику неясно, как сформулировать переход «в буквах». Преподаватель показал, как справиться с этим. Существенно, что он, формулируя переход, использовал для обозначения переменной не ту же букву, что в самом тождестве. Дело в том, что при первом своём появлении эта буква (k) играет роль не переменной, а константы (хотя

и произвольной), указывающей на место, до которого дошла волна индуктивного доказательства. Переменной она становится позднее, в общей формулировке перехода.

Часто при изложении индукционного решения для краткости переменные в тождестве и переходе обозначают одной буквой, причём, формулируя переход, произносят фразы типа «…а теперь вместо n подставим $n+1$». В начале обучения такое недопустимо, ибо дезориентирует большинство учащихся как идейно (труднее увидеть в теореме о переходе цепочку шагов), так и технически (подставить $n+1$ вместо n начинающему нелегко).

Мы расстаёмся с нашими персонажами и переходим к задачам. В задачах 9–16 требуется доказать тождества с натуральной переменной n.

Задача 9. $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Задача 10. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Задача 11. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Задача 12. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{n-1}{n}$.

Задача 13. $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Задача 14. $\dfrac{1}{x(x+y)}+\dfrac{1}{(x+y)(x+2y)}+\ldots+\dfrac{1}{(x+(n-1)y)(x+ny)}=\dfrac{n}{x(x+ny)}$.

Задача 15. $\dfrac{m!}{0!}+\dfrac{(m+1)!}{1!}+\ldots+\dfrac{(m+n)!}{n!}=\dfrac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}$, где $m,n=0,1,2,\ldots$

Задача 16. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$.

Комментарии. В задачах 9–15 переход доказывается так же, как и в разобранной выше задаче. Но в задаче 16 его удобнее доказывать, представляя $(k+1)$-ю левую часть не как сумму, а как произведение k-й левой части на $1-1/(k+1)^2$. Такой приём полезен и при доказательстве некоторых неравенств (см. ниже).

В задаче 12 база не $n=1$, а $n=2$. Обратите внимание учеников на то, что на ход процесса индукции это никак не влияет.

В задаче 15 индукция возможна по любой из двух переменных. Полезно провести обе и сравнить. В обоих случаях начинать лучше с нуля.

Задачи 11 и 12 суть частные случаи соответственно задач 15 (при $m = 2$) и 14 (при $x = y = 1$). Взяв другие значения m, x и y, можно получить любое нужное число упражнений типа 11 и 12. В сильном кружке будет полезно, дав ребятам несколько таких упражнений, попросить их восстановить общий вид породившего эти упражнения тождества.

Большинство тождеств 9–16 имеет неплохие неиндукционные доказательства. Так, задача 9 имеет красивое геометрическое решение (рис. 63). Тождество 11 можно получить из тождеств 9 и 10. Тождество 13 можно доказать, поделив $x^{n+1} - 1$ на $x - 1$ «уголком», а тождество 16 — прямым вычислением. Для доказательства же тождества 12 достаточно заметить, что его левая часть равна

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Такой приём методически выигрышен и при доказательстве других тождеств. Для человека, достаточно хорошо усвоившего ММИ, обсуждение этих альтернативных решений будет очень полезно.

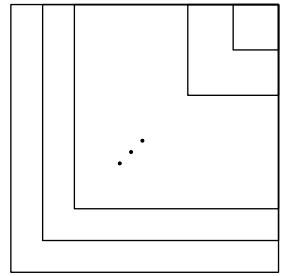


Рис. 63

После тождеств обычно решаются задачи на делимость. Техника составления и обоснования переходов здесь похожа на соответствующую технику для тождеств: для обоснования обычно составляется приращение данного в условии выражения и проверяется его делимость на нужное число. Задачи 17–19 имеют несложные альтернативные решения (при помощи перебора остатков). Довольно трудная задача 22 может служить источником любого числа упражнений типа 18–19. Итак: докажите, что при любом натуральном n выполнены следующие утверждения.

Задача 17. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9.

Задача 18. $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

Задача 19. $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Задача 20. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

Задача 21. $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

Задача 22*. $ab^n + cn + d$ делится на натуральное число m, если известно, что делятся на m числа $a + d$, $(b-1)c$, $b + c - 1$.

Триаду типовых задач на ММИ замыкают задачи на доказательство неравенств. Здесь доказательства переходов более разнообразны (см. [99]).

Задача 23. Докажите неравенство $2^n > n$, где n — любое натуральное число.

Задача 24. При каких натуральных n выполнены следующие утверждения: а) $2^n > 2n+1$; б) $2^n > n^2$?

Задача 25. Докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Задача 26. Докажите неравенство $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$

Задача 27. Докажите, что модуль суммы любого числа слагаемых не превосходит суммы модулей этих слагаемых.

Задача 28. Докажите неравенство $(1+x)^n > 1 + nx$, где $x > -1$, $x \neq 0$ и $n = 2, 3, \ldots$

Задача 29. Докажите неравенство

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

где n — любое натуральное число.

Комментарии. В задачах 23, 24 для перехода можно проверить, что при любом n приращение левой части неравенства больше приращения правой.

В задаче 24б при доказательстве перехода можно использовать задачу 24а.

В задаче 25 докажите, что левая часть неравенства монотонно возрастает.

В задаче 27 примените индукцию по числу слагаемых.

Что касается задач 28, 29, см. комментарий к задаче 16.

§ 4. Другие схемы ММИ

До сих пор мы работали с основной версией ММИ. Когда она прочно усвоена, можно перейти и к более сложным схемам индукции. Многие из них можно формально свести к основной версии преобразованием цепочки доказываемых утверждений, но методически разумнее обосновывать их, обращаясь непосредственно к образу «волны доказательств».

Вначале рассмотрим схему «ИНДУКЦИЯ ОТ ВСЕХ $n \leqslant k$ К $n = k+1$».

В основной версии ММИ шаг индукции состоит в выведении утверждения $У_{k+1}$ из одного предыдущего — $У_k$. Но иногда для обоснования $У_{k+1}$ приходится использовать все или несколько из предыдущих утверждений — от $У_1$ до $У_k$. Это, безусловно, возможно, ибо если волна доказательства дошла до $У_k$, то она до этого прошла и все предшествующие утверждения цепочки. При сохранении обычной базы переход в этом случае выглядит так:

(П1): при любом натуральном k из истинности утверждений $У_1$, $У_2$, …, $У_k$ вытекает истинность $У_{k+1}$.

* * *

Рассмотрим пример.

Задача 30. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).

Решение. Прежде всего докажем базу. Если наше число равно 1 или 2, то существование представления очевидно.

Обозначим теперь наше число через n и отыщем максимальную степень двойки, не превосходящую n. Пусть это будет число 2^m, т. е. $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$. Рассмотрим разность $d = n - 2^m$. Это число меньше, чем n, и меньше, чем 2^m. По индукционному предположению его можно представить в виде суммы нескольких различных степеней двойки, причём ясно, что 2^m в это представление входить не может. Добавляем к этому представлению слагаемое 2^m и получаем требуемое представление для n. Индукция завершена.

Задача 31. Докажите, что всякий (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разделить на треугольники непересекающимися диагоналями.

Указание. Индукция по числу сторон. Переход основан на лемме о наличии у всякого многоугольника целиком лежащей в нём диагонали. Такая диагональ делит многоугольник на два многоугольника с меньшим числом сторон.

* * *

Ещё одну схему ММИ демонстрирует следующая задача.

Задача 32. Известно, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + 1/x^n$ тоже целое.

Решение. Заметим, что

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}+x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}},$$

а значит,

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Мы видим, что $(k+1)$-я сумма будет целым числом, если целыми числами являются две предыдущие суммы. Поэтому процесс индукции пойдёт, если проверить, что целыми являются две начальные суммы: $x+1/x$ и x^2+1/x^2. Проверку предоставляем читателю.

Комментарий. Особенность этого варианта ММИ в том, что при выполнении шага перехода мы опираемся не на одно, а на два предыдущих утверждения. Поэтому и база здесь (а базой естественно называть тот начальный отрезок нашей цепочки, верность утверждений в котором надо проверять непосредственно, без всяких переходов — они там не действуют) состоит не из одного, а из двух первых утверждений ряда.

Задача 33. Последовательность чисел a_1, a_2, …, a_n, … такова, что $a_1=3$, $a_2=5$, а $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$ при $n>2$. Докажите, что $a_n=2^n+1$ при всех натуральных n.

Указание. См. более общую задачу 43.

Примечание. В задаче 33 и трёх следующих за ней мы сталкиваемся не только с доказательством, но и с определением по индукции: все члены данных здесь последовательностей, кроме нескольких первых, задаются индуктивно, через предыдущие. Заданные таким образом последовательности называются рекуррентными или возвратными; им посвящены книги [96] и [98]. Подробнее об определениях, а также построениях и вычислениях по индукции см. в [100, глава 2].

Задача 34. Дано: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$ при всех $n>2$. Докажите, что $a_{n+6}=a_n$ при любом натуральном n.

Задача 35. Дан ряд чисел Фибоначчи: $\Phi_1=\Phi_2=1$ и $\Phi_{n+1}=\Phi_n+\Phi_{n-1}$ при всех $n\geqslant 2$. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных чисел Фибоначчи.

Задача 36*. Докажите, что n-е число Фибоначчи делится на 3 тогда и только тогда, когда n делится на 4.

Комментарий. В такой формулировке задачу по индукции решить вряд ли удастся. Докажите более общий факт о повторении остатков

от деления чисел Фибоначчи на 3 с периодом 8. Числам Фибоначчи посвящена одноимённая книга [96].

Задача 37. Банк имеет неограниченное количество трёх- и пятирублёвых купюр. Докажите, что он может выдать ими без сдачи любое число рублей начиная с восьми.

Комментарий. Индукция по числу рублей. База состоит из трёх утверждений:

$$8 = 5 + 3, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 10 = 5 + 5.$$

Переход: если можно выдать k, $k+1$ и $k+2$ рублей, то можно выдать и $k+3$, $k+4$ и $k+5$ рублей. Эту индукцию со сложной базой можно разложить и на три обычные со схемами

$$8 \to 11 \to 14 \to \ldots, \ 9 \to 12 \to 15 \to \ldots \text{ и } 10 \to 13 \to 16 \to \ldots$$

Отметим, что в задачах 32–36 подобное было невозможно.

Имеется и неиндукционный вариант этого решения, основанный на равенствах

$$3n + 1 = 5 + 5 + 3(n-3) \quad \text{и} \quad 3n + 2 = 5 + 3(n-1),$$

но найти его, наверное, не легче, чем приведённое выше решение.

Три следующие задачи идейно очень близки задаче 37.

Задача 38. Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или на 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков начиная с девяти.

Задача 39. Докажите, что квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n начиная с шести.

Задача 40. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого n начиная с шести.

Комментарии. В задаче 38 если мы рвём кусок на 4 или на 6 кусков, то всего кусков становится на 3 или 5 больше. Далее см. решение задачи 37.

В задачах 39, 40 квадрат (правильный треугольник) можно разрезать как на 4, так и на 6 квадратов (правильных треугольников), как показано на рис. 64. Получается задача 38. Есть и простые неиндукционные решения, связанные с возможностью разрезать квадрат (правильный треугольник) на любое чётное число квадратов (правильных треугольников), — см. рис. 65.

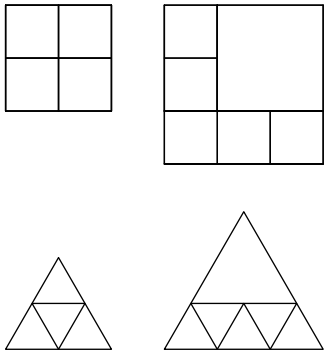


Рис. 64

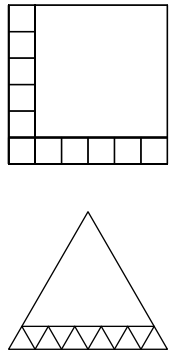


Рис. 65

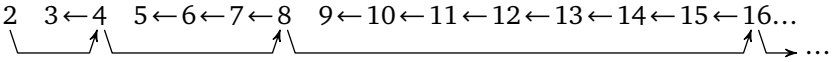
Существуют и другие, кроме разобранных нами только что, схемы индукции. К таким можно отнести схему «ВЕТВЯЩАЯСЯ ИНДУКЦИЯ», при помощи которой даётся доказательство замечательного неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим.

Задача 41*. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Схема решения. База: $n = 2$. Затем переходами от $n = 2^k$ к $n = 2^{k+1}$ неравенство доказывается для всех n, являющихся степенями двойки. После этого доказывается, что если неравенство верно для n чисел, то оно верно и для $n - 1$ чисел. Волна доказательств распространяется в соответствии со следующей схемой:



Подробности доказательства см. в [99, пример 24]; см. также главу «Неравенства». Индукцию по такой схеме естественно назвать «ветвящейся».

Схему «ИНДУКЦИЯ ВНИЗ» (по отрицательным числам), а также схему «ДВОЙНАЯ ИНДУКЦИЯ», с помощью которой доказываются различные теоремы, содержащие два натуральных параметра, иллюстрируют приведённые ниже задачи 43 и 44.

§ 5. Задачи почти без комментариев

Задача 42. Даны два взаимно простых натуральных числа m и n, а также число 0. Имеется калькулятор, который умеет выполнять лишь одну операцию: вычисление среднего арифметического двух целых чисел, если они имеют одинаковую чётность. Докажите, что при помощи этого калькулятора можно получить все натуральные числа от 1 до n.

Задача 43. Для последовательности $a_1, a_2, \ldots$ из задачи 33 определите члены $a_0, a_{-1}, \ldots$ таким образом, чтобы равенство $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ было верно при любом целом n. Докажите, что при этом равенство $a_n = 2^n + 1$ также будет верно при любом целом n.

Задача 44. Докажите, что $2^{m+n-2} \geqslant mn$ при любых натуральных m и n.

Задача 45*. Дано несколько квадратов. Докажите, что их можно разрезать на такие части, из которых удастся сложить один квадрат.

Задача 46*. Докажите, что из любых 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n чисел, сумма которых делится на 2^n.

Задача 47. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n окружностей? А n треугольников?

Примечание. Сравните с задачей 6. Не забудьте построить примеры соответствующих разбиений; это тоже делается по индукции.

Задача 48. На плоскости нарисовано несколько окружностей. В каждой из них проведено по хорде. Докажите, что получившуюся «карту» можно раскрасить тремя красками так, чтобы любые две соседние области были покрашены разными цветами.

* * *

Задача 49*. Докажите «от противного», что сформулированный в начале главы принцип математической индукции равносилен такому «принципу наименьшего числа»: в любой совокупности натуральных чисел есть наименьшее. Придумайте решение какой-либо из предыдущих задач (например, задачи 46), опирающееся на этот принцип (проведите базу и дальше рассуждайте от противного), и сравните его с индукционным.

Подробнее о приложениях принципа наименьшего числа к решению задач см. [21, с. 88–96].

Заключение. Метод математической индукции — чрезвычайно употребительная и очень полезная идея, с применениями которой вы столкнётесь как в рамках настоящего сборника, так и во многих других задачах. Но мы хотели бы предостеречь вас от излишне частого употребления этого замечательного инструмента математического доказательства. Не следует думать, что всякая задача, в решении которой встречаются слова «и т. д.», «аналогично», есть задача на применение ММИ. Индукционные доказательства многих утверждений — с некоторыми из них вы познакомитесь в главах «Графы–2», «Неравенства» — выглядят более искусственными, чем доказательства, использующие такие простые методы, как, например, прямой подсчёт или рекурсивные рассуждения. Такие доказательства не стоит рассматривать в процессе освоения ММИ, но это полезно сделать, когда метод твёрдо усвоен.

Глава 10

Делимость–2. Сравнения и диофантовы уравнения

§ 1. Сравнения по модулю

В главе «Делимость и остатки» мы подробно обсудили понятие остатка при делении на натуральное число. Было замечено, что при решении многих задач, связанных с делимостью, важными оказываются не сами числа, а лишь их остатки при делении на некоторое фиксированное число.

Поэтому естественно дать следующее определение: пусть m — натуральное число; целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если они имеют одинаковые остатки при делении на m. Это обозначается так: $a \equiv b \pmod{m}$.

Например, $9 \equiv 29 \pmod{10}$, $1 \equiv 3 \pmod{2}$, $16 \equiv 9 \pmod{7}$, $3 \equiv 0 \pmod{3}$, $2n + 1 \equiv 1 \pmod{n}$. Заметим, что делимость A на m равносильна тому, что $A \equiv 0 \pmod{m}$.

Задача 1. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

Решение. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$. Обозначим одинаковый для a и b остаток при делении на m через r. Тогда $a = mk_1 + r$, $b = mk_2 + r$. Следовательно, $a - b = m(k_1 - k_2)$ делится на m.

Обратно, пусть $a - b$ делится на m. Разделим a и b на m с остатком. Получим $a = mk_1 + r_1$, $b = mk_2 + r_2$. Следовательно, $a - b = m(k_1 - k_2) + r_1 - r_2$ делится по условию на m. Таким образом, $r_1 - r_2$ делится на m. Так как $|r_1 - r_2| < m$, получаем, что $r_1 = r_2$.

Только что разобранная задача позволяет дать другое определение сравнимости двух чисел: целые числа a и b сравнимы по модулю m, если $a - b$ делится на m.

В дальнейшем мы будем пользоваться и тем и другим определениями.

Для преподавателей. Перед определением сравнимости целых чисел необходимо проверить, не разучились ли школьники работать с остатками. Для этого полезно решить несколько задач, аналогичных задачам из § 2 главы «Делимость и остатки».

Замечательно, что введённое определение позволяет легко формулировать и доказывать основные свойства остатков.

Задача 2. Докажите, что если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d \pmod m$.

Решение. Так как $a - b$ делится на m и $c - d$ делится на m, получаем, что

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

делится на m, что и требовалось доказать.

Задача 3. Докажите, что если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a - c \equiv b - d \pmod m$.

Задача 4. Докажите, что если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $ac \equiv bd \pmod m$.

Решение. Число

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$$

делится на m, что и требовалось доказать.

Задача 5. Докажите, что если $a \equiv b \pmod m$, а n — натуральное число, то $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Методические замечания. Хотелось бы ещё раз обратить ваше внимание на то, что формулировки и доказательства свойств остатков, записанные на языке сравнений, выглядят намного привлекательней и проще. Например, условие задачи 2 раньше нужно было формулировать так: сумма двух чисел и сумма их остатков при делении на m имеют одинаковые остатки при делении на m.

Задачи 2–5 по существу утверждают, что сравнения по данному модулю можно складывать, вычитать, умножать и возводить в степень, совсем как обычные равенства. Вопрос о делении сравнений мы отложим до § 4.

Прежде чем двигаться дальше, покажем, как решение уже известной нам задачи может быть изложено на языке сравнений.

Задача 6. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком целом n.

Решение. Ясно, что каждое целое число n сравнимо по модулю 3 либо с 0, либо с 1, либо с 2.

Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то $n^2 \equiv 0 \pmod 3$ (умножение сравнений) и $n^2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ (сложение сравнений).

Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$.

Если $n \equiv 2 \pmod 3$, то $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$.

Таким образом, ни в одном случае мы не получим $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Разберём теперь ещё одну задачу.

Задача 7. Найдите остаток от деления 6^{100} на 7.

Решение. Заметим, что $6 \equiv -1 \pmod 7$. Возводя это сравнение в сотую степень, получаем $6^{100} \equiv (-1)^{100} \pmod 7$, т. е. $6^{100} \equiv 1 \pmod 7$.

В связи с этим решением отметим, что иногда бывает удобно использовать и отрицательные числа, сравнимые с данным.

Вот ещё несколько задач, при решении которых может быть полезно указанное соображение.

Задача 8. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Задача 9. Докажите, что

а) $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66;

б) $a^n + b^n$ делится на $a + b$, если n — нечётное число.

Задача 10. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при нечётном n.

Задача 11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх точных кубов.

Задача 12. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задачи 11 и 12 намного труднее предыдущих, так как для их решения нужно «угадать модуль».

Разберём решение задачи 12. Куб натурального числа сравним по модулю 7 либо с 0, либо с 1, либо с -1 — проверьте! Поэтому сумма двух кубов сравнима с одним из следующих чисел: $-2, -1, 0, 1, 2$. Заметим, что $10 \equiv 3 \pmod 7$, а $10^3 \equiv -1 \pmod 7$. Поэтому 10^{3n+1} сравнимо либо с 3, либо с -3 по модулю 7.

* * *

Зафиксируем натуральное число n. Тогда бесконечное множество всех целых чисел естественно разбивается на n классов: в один класс

попадают числа, имеющие одинаковые остатки при делении на n (сравнимые по модулю n). Например, при $n = 2$ получаем два класса: чётные и нечётные числа. При решении большинства задач, связанных с делимостью, для доказательства утверждений о всех целых числах достаточно проверить эти утверждения лишь для одного (любого!) из представителей каждого из рассмотренных классов. Так, в задачах § 2 главы «Делимость и остатки» обычно перебирались все остатки при делении на некоторое число, а в задачах 11, 12 этой главы оказалось удобным выбрать других представителей.

Следующие две задачи посвящены этой теме.

Задача 13. Назовём натуральное число n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 10001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \ldots, 10000$ чётное число удобных.

Задача 14. Докажите, что среди 5001 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 10000.

И наконец заключительная серия задач этого параграфа.

Задача 15. а) Может ли квадрат натурального числа оканчиваться на 2?

б) Можно ли, используя лишь цифры 2, 3, 7, 8 (возможно, по несколько раз), составить квадрат натурального числа?

Задача 16. Какое число нужно добавить к числу $(n^2-1)^{1000}\cdot(n^2+1)^{1001}$, чтобы результат делился на n?

Задача 17. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \ldots + 10^{10000000000}.$$

Задача 18. Сколько существует натуральных чисел n, меньших 10000, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

Задача 19. Обозначим через k произведение нескольких (больше одного) первых простых чисел. Докажите, что число а) $k - 1$; б) $k + 1$ не является точным квадратом.

Задача 20. Существует ли такое натуральное n, что $n^2 + n + 1$ делится на 1955?

Задача 21. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

Решение. Имеем

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} \equiv$$
$$\equiv 12(12^{2n} - 11^n) = 12(144^n - 11^n) \equiv 0 \pmod{133}.$$

Это решение показывает, что иногда бывает полезно не только придумывать красивые идеи, но и кое-что «делать руками».

Задача 22*. Пусть n — такое натуральное число, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей числа n делится на 24.

Задача 23*. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел такова, что $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ при всех n.

а) Известно, что $a_1 = a_2 = 1$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 4.

б) Докажите, что $a_n - 22$ — составное число при любом $n > 10$.

На этом мы обрываем список задач на сравнения. Отметим лишь, что почти все последующие задачи главы фактически продолжают его.

§ 2. Десятичная запись и признаки делимости

Вы, конечно, хорошо знаете признаки делимости на 10, 2, 5, 4. Теперь, познакомившись со сравнениями, мы можем сформулировать и доказать значительно более сильные утверждения.

Задача 24. Докажите, что любое натуральное число сравнимо со своей последней цифрой по модулю а) 10; б) 2; в) 5.

Решение. Вычтем из числа его последнюю цифру и получим число, оканчивающееся нулём, т. е. делящееся на 10 (а значит, и на 5, и на 2).

Для преподавателей. Перед обсуждением признаков делимости необходимо ещё раз проверить, что школьники хорошо понимают тождество

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10^1 + a_n.$$

Задача 25. Докажите, что $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n} = \overline{a_{n-1}a_n} \pmod 4$.

Задача 26. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2^n и 5^n.

А теперь несколько задач, в решении которых используются перечисленные признаки делимости.

Задача 27. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечётна.

Решение. Так как последняя цифра равна 6, возводимое в квадрат число чётно. Раз оно является квадратом, оно делится и на 4. Следовательно, число, составленное из двух его последних цифр, должно делиться на 4. Все требуемые двузначные числа легко выписать: 16, 36, 56, 76, 96.

Задача 28. Предпоследняя цифра квадрата натурального числа нечётная. Докажите, что его последняя цифра равна 6.

Задача 29. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

Задача 30. Найдите 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр.

Решение. Подберём число так, чтобы сумма его цифр равнялась 125. Делимость числа на 125 определяется тремя его последними цифрами. Следовательно, годится, скажем, число $111\ldots11599125$ (в начале записи единица написана 94 раза).

Перейдём теперь к признакам делимости на 3 и на 9, которые мы тоже сформулируем в общем виде.

Задача 31. Докажите, что любое натуральное число сравнимо с суммой своих цифр по модулю а) 3; б) 9.

Решение. Рассмотрим число

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10^1 + a_n.$$

Ясно, что $10 \equiv 1 \pmod 9$. Поэтому $10^k \equiv 1 \pmod 9$ для любого натурального k. Таким образом,

$$a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10^1 + a_n \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod 9.$$

Рассуждения для числа 3 совершенно аналогичны.

Следующий цикл задач связан с этими признаками делимости.

Задача 32. Можно ли записать точный квадрат, использовав по 10 раз цифры а) 2, 3, 6; б) 1, 2, 3?

Задача 33. У числа 2^{100} нашли сумму цифр, у результата снова нашли сумму цифр и т. д. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

Задача 34. Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

Задача 35. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

Задача 36. Сколько имеется четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них — 97?

Задача 37. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

Задача 38. Докажите, что произведение последней цифры числа 2^n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

Задача 39. Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 1970?

Задача 40. Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и т. д., 100 раз. Докажите, что в результате получится нуль.

Задача 41*. Пусть A — сумма цифр числа 4444^{4444}, а B — сумма цифр числа A. Найдите сумму цифр числа B.

Рассуждения, очень похожие на доказательство признака делимости на 9, позволяют доказать следующий признак делимости на 11.

Задача 42. Докажите, что

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1 \pmod{11}.$$

Указание. Используйте соотношение $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

А теперь несколько задач, связанных с этим признаком делимости.

Задача 43. Докажите, что число $111\ldots11$ ($2n$ единиц) составное.

Задача 44. Докажите, что число $\overline{a_1a_2\ldots a_na_n\ldots a_2a_1}$ составное.

Задача 45. Пусть a, b, c, d — различные цифры. Докажите, что число $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на $\overline{aabb}$.

Задача 46. Пусть A — шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что A не делится на 11.

Задача 47. Докажите, что разность числа, имеющего нечётное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

* * *

Признаки делимости составляют лишь небольшую часть утверждений, связывающих делимость числа с его десятичной записью. Это демонстрирует следующий цикл задач.

Задача 48. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

Задача 49. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

Задача 50. Сумма цифр трёхзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.

Задача 51. а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причём $\overline{def} - \overline{abc}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 7.

в) Сформулируйте и докажите признак делимости на 13.

Задача 52. а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причём $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.

Задача 53. Существует ли такое трёхзначное число $\overline{abc}$, что $\overline{abc} - \overline{cba}$ является квадратом натурального числа?

Задача 54. Найдите наименьшее число, записываемое одними единицами, делящееся на $333\ldots33$ (в записи 100 троек).

Задача 55. Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел оканчиваться на 1989?

Задача 56. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

Решение. Запишем наше число в виде $10a + b$, где b — цифра единиц. Получим уравнение $100a + b = 9(10a + b)$. Отсюда $10a = 8b$, т. е. $5a = 4b$. Таким образом, b делится на 5. Рассмотрев два случая $b = 0$, $b = 5$, получаем единственный ответ: 45.

Методические замечания. Это решение мы разобрали с единственной целью: показать, что иногда бывает полезно написать уравнение, связывающее цифры искомого числа.

Задача 57. Между цифрами двузначного числа, кратного трём, вставили нуль и к полученному трёхзначному числу прибавили удвоенную цифру его сотен. Получилось число, в 9 раз большее первоначального. Найдите исходное число.

Задача 58. Найдите четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, первые две цифры которого равны между собой и последние две цифры которого также равны между собой.

Задача 59. Найдите все трёхзначные числа, каждая натуральная степень которых оканчивается на три цифры, составляющие первоначальное число.

Задача 60. К числу справа приписывают тройки. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

Задача 61*. Докажите, что все числа ряда

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001,\ \ldots$$

являются составными.

§ 3. Уравнения в целых числах и другие задачи

Хорошо известная задача утверждает, что сумму в N рублей при $N > 7$ всегда можно разменять трёх- и пятирублёвыми купюрами (см. главу «Индукция», задача 37). В переводе на язык уравнений это означает, что уравнение

$$3x + 5y = N \qquad (*)$$

всегда имеет решение в неотрицательных целых числах x и y при натуральном N, большем 7. В этом параграфе мы будем иметь дело с подобными уравнениями (и многими другими), хотя решать их обычно будем в целых числах без каких-либо ограничений.

* * *

Задача 62. Решите уравнение $3x + 5y = 7$ в целых числах.

Разберём решение — оно будет весьма поучительно, так как даст нам возможность решать аналогичным образом все подобные задачи.

Найдём сначала какое-нибудь решение данного уравнения. Так как $3\cdot 2+5\cdot(-1)=1$, получаем, что $3\cdot 14+5\cdot(-7)=7$, и, следовательно, $x_0 = 14$, $y_0 = -7$ — это решение нашего уравнения (одно из многих, не более!). Итак,

$$3x + 5y = 7, \quad 3x_0 + 5y_0 = 7.$$

Вычтем одно уравнение из другого, обозначим $x - x_0$ и $y - y_0$ через a и b и получим $3a + 5b = 0$. Отсюда мы видим, что b делится на 3, а a — на 5. Положим $a = 5k$, тогда $b = -3k$ — здесь k, очевидно, может быть любым целым числом. Итак, мы получаем набор решений:

$$\begin{array}{l} x - x_0 = 5k, \\ y - y_0 = -3k, \end{array} \quad \text{т. е.} \quad \begin{array}{l} x = 14 + 5k, \\ y = -7 - 3k, \end{array}$$

где k может быть любым целым числом. Других решений, конечно, нет.

Для преподавателей. Мы надеемся, что ваши ученики также отчётливо это осознают. Не поняв этой части решения — того, что пары (x, y) исчерпывают все решения уравнения $(*)$ при $N = 7$, — невозможно двигаться дальше.

Задача 63. Найдите все целые решения уравнения $3x - 12y = 7$.

Преодолев этот «барьер», пойдём далее и разберём вкратце «очень сложную» задачу 64.

Задача 64. Решите уравнение $1990x - 173y = 11$.

Числа, участвующие в формулировке, так велики, что подбором здесь конкретного решения не найти. Однако нам поможет то, что числа 1990 и 173 взаимно просты (проверьте это).

Лемма. *НОД*$(1990, 173)$, *равный* 1, *можно представить в виде* $1990m - 173n$, *где* m *и* n *— некоторые целые числа.*

Доказательство этой леммы следует из того факта, что все числа, которые получаются в процессе алгоритма Евклида (см. главу «Делимость и остатки»), представимы в указанном виде.

Конкретно в данном случае, используя алгоритм Евклида, можно получить $m = 2$, $n = 23$. Итак, при помощи такого мощного оружия, как алгоритм Евклида, мы получаем конкретное решение вспомогательного уравнения $1990m - 173n = 1$: пару $(2, 23)$. Следовательно, $x_0 = 22$, $y_0 = 253$ — решение уравнения

$$1990x - 173y = 11.$$

Дальше точно так же, как и в задаче 62, получаем, что

$$x = x_0 + 173k = 22 + 173k,$$

$$y = y_0 + 1990k = 253 + 1990k, \quad k \text{ — любое целое число.}$$

Задача 65. Найдите все целые решения уравнения $21x + 48y = 6$.

Примечание. Теперь мы, вообще говоря, умеем решать любое уравнение вида

$$Ax + By = C \qquad (**)$$

в целых числах x и y.

Теорема. *Если целые числа* A *и* B *взаимно просты, то существуют такие целые числа* x_0 *и* y_0, *что* $Ax_0 + By_0 = C$ *и все решения уравнения* $(**)$ *при этом имеют вид*

$$x = x_0 + Bk, \quad y = y_0 - Ak.$$

Попробуйте сформулировать общий результат и строго докажите его. Не забудьте про случай, когда A и B не взаимно просты, но C не делится на НОД(A, B).

Задача 66. Решите уравнение $2x+3y+5z=11$ в целых числах. (Кстати, имеет ли оно решения в натуральных числах? — это совсем простое упражнение.)

Задача 67*. Фишка стоит на одном из полей бесконечной в обе стороны клетчатой полоски бумаги. Она может сдвигаться на m полей вправо или на n полей влево. При каких m и n она сможет переместиться в соседнюю справа клетку? За какое наименьшее число ходов она сможет это сделать?

* * *

Перейдём теперь к примерам более сложных уравнений в целых числах (если количество неизвестных в таком уравнении — два или более, то такие уравнения называют диофантовыми, в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского, исследовавшего некоторые типы таких уравнений ещё до нашей эры). Начнём с самых простых.

В задачах 68–84 требуется решить уравнение в целых числах.

Задача 68. $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.

Задача 69. $xy = x + y + 3$.

Задача 70. $x^2 = 14 + y^2$.

Задача 71. $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

Решение всех этих задач связано с одной очень простой, но популярной идеей — с перебором. Хотя перебрать все пары целых чисел и для каждой из них проверить, не является ли она решением уравнения, невозможно, но небольшое преобразование уравнения позволяет без труда свести перебор до минимума.

Вот как решается задача 69. Так как $xy - x - y = 3$, получаем, что $(x-1)(y-1) = 4$. Осталось только перебрать возможные разложения числа 4 в произведение двух целых множителей.

Ответ: $(5, 2)$, $(2, 5)$, $(0, -3)$, $(-3, 0)$, $(3, 3)$, $(-1, -1)$.

В задачах 70 и 71 так же, как и в разобранном решении, надо удачно преобразовать данное уравнение. Итак, запомним следующее.

ИДЕЯ ПЕРВАЯ: удачное преобразование уравнения и перебор вариантов.

Однако уже в следующей задаче эта идея не срабатывает.

Задача 72. $x^2 + y^2 = 4z - 1$.

Ясно, что преобразовать к более удачному виду это уравнение не удастся; осуществить перебор также не представляется возможным. Этот новый представитель нашего «диофантова зоопарка» замечателен тем, что решений в целых числах у него нет.

В самом деле, посмотрим, какие остатки могут давать точные квадраты по модулю 4 (выбор модуля 4 подсказан нам самим видом правой части уравнения). Недолгий перебор показывает, что это остатки 0 и 1. Так как сумма двух остатков такого вида не может давать остаток -1, мы получаем, что решений данное уравнение не имеет.

Следовательно, появилась ещё одна идея.

ИДЕЯ ВТОРАЯ: рассмотреть остатки по какому-либо модулю.

Задача 73. $x^2 - 7y = 10$.

Задача 74. $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.

Задача 75. $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Задача 76. $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

Задача 77. $3^m + 7 = 2^n$.

Разберём решение задачи 74. Так как x^3 может по модулю 7 быть сравнимым лишь с 0, 1 и -1, выражение $x^3 + 21y^2 + 5$ сравнимо (mod 7) с 5, 6 или с 4 и, следовательно, не может быть равным нулю.

Методические замечания. Вы, скорее всего, уже заметили, что «идея вторая» позволяет доказывать лишь то, что некоторое уравнение решений не имеет. Если некоторое уравнение имеет решения, например, по модулю 2 и по модулю 7, то из этого никак не следует, что оно имеет решения в целых числах. Пример: уравнение из задачи 72.

Давайте теперь попробуем подступиться к задаче 77. Сразу видно, что решения у этого уравнения есть: $m = 2$, $n = 4$. Так, значит, нет смысла рассматривать остатки? Не торопитесь с выводами. Итак, по модулю 3 левая часть сравнима с 1, и отсюда мы делаем вывод, что n чётно, т. е. $n = 2k$. Уравнение преобразуется к виду $3^m + 7 = 4^k$. Теперь в игру включается модуль 4. Поскольку $4^k - 7 \equiv 1 \pmod 4$, мы видим, что и m чётно, т. е. $m = 2p$. Итак, мы имеем уравнение $3^{2p} + 7 = 2^{2k}$. Что дальше? Используем «идею первую» — удачно преобразуем уравнение:

$$7 = 2^{2k} - 3^{2p} = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p).$$

Отсюда следует, что $2^k + 3^p = 7$, $2^k - 3^p = 1$, и мы получаем единственное решение $k = 2$, $p = 1$, т. е. $m = 2$, $n = 4$.

Таким образом, мы использовали в решении обе идеи, оба метода, уже опробованных нами ранее. Такое комбинирование идей — чрезвычайно распространённое явление в математике.

Вот ещё одна задача на использование подобной комбинации.

Задача 78. $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Решение. Сразу ясно, что n не делится на 3 и, значит, $n = 3k + 1$ или $n = 3k + 2$. Разберём оба случая.

1. Пусть $n = 3k + 2$, $3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 12k + 4$. Сокращая, получаем

$$2^m = 3k^2 + 4k + 1 = (3k + 1)(k + 1).$$

Следовательно, и $k + 1$, и $3k + 1$ — степени двойки. Видно, что и $k = 0$, и $k = 1$ подходят, и мы получаем решения $n = 2$, $m = 1$ и $n = 5$, $m = 3$. Но при $k \geqslant 2$ имеем $4(k + 1) > 3k + 1 > 2(k + 1)$ и, следовательно, $k + 1$ и $3k + 1$ не могут одновременно быть степенями двойки.

2. Пусть $n = 3k + 1$. Разбирая этот случай аналогичным образом, мы получаем ещё одно решение: $n = 7$, $m = 4$. Вместе с идеей перебора остатков и идеей разложения на множители мы использовали идею оценки.

ИДЕЯ ТРЕТЬЯ: при решении диофантовых уравнений часто оказываются полезными различные неравенства и оценки.

Задача 79. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Задача 80. $x^2 - y^2 = 1988$.

Задача 81. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ имеет единственное решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда n — простое число.

Конечно, в этом небольшом параграфе мы не сможем подробно рассказать о других, более сложных и интересных методах решения диофантовых уравнений. Поэтому мы и отсылаем всех заинтересовавшихся этой темой читателей к книгам [32, 76, 79]. В конце параграфа приведём ещё три задачи повышенной трудности для самостоятельного решения.

Задача 82*. $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$.

Задача 83*. $x^2 + y^2 = z^2$.

Задача 84*. $x^2 - 5y^2 = 1$.

§ 4. Малая теорема Ферма

Этот параграф посвящён замечательному и глубокому теоретико-числовому факту, который был сформулирован и доказан великим французским математиком XVII века Пьером Ферма. Однако прежде, чем мы перейдём к формулировке этого результата, обсудим, как и было обещано в § 1, вопрос о сокращении сравнений.

Задача 85. Пусть $ka \equiv kb \pmod{m}$, k и m взаимно просты. Тогда $a \equiv b \pmod{m}$.

Решение. Поскольку $ka \equiv kb \pmod{m}$, получаем, что $ka - kb = k(a-b)$ делится на m. Так как k и m взаимно просты, получаем, что $a - b$ делится на m, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$.

На примерах легко убедиться, что требование взаимной простоты k и m необходимо. Действительно, $5 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 7 \pmod{10}$, но при этом 3 и 7 не сравнимы $\pmod{10}$.

Однако верно следующее утверждение.

Задача 86. Пусть $ka \equiv kb \pmod{kn}$. Тогда $a \equiv b \pmod{n}$.

Теперь всё готово к доказательству малой теоремы Ферма.

Теорема. *Пусть p — простое число и A не делится на p. Тогда* $A^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Рассмотрим $p-1$ число: A, $2A$, $3A$, …, $(p-1)A$. Покажем, что среди них нет двух чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на p. Действительно, если $kA \equiv nA \pmod{p}$, то $k \equiv n \pmod{p}$ — см. задачу 85, — а это невозможно при разных натуральных k и n, меньших p. Следовательно, среди остатков при делении на p этих $p-1$ чисел встречаются ровно по одному разу все числа от 1 до $p-1$. Поэтому, перемножив все числа, получим

$$A \cdot 2A \cdot 3A \cdot \ldots \cdot (p-1)A \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod{p},$$

т. е.

$$(p-1)! \cdot A^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Так как p — простое число, числа $(p-1)!$ и p взаимно просты. Поэтому, вновь воспользовавшись результатом задачи 85, получим $A^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, что и требовалось доказать. □

Следствие. *Пусть p — простое число. Тогда для любого целого A выполнено сравнение* $A^p \equiv A \pmod{p}$.

Малая теорема Ферма представляет собой не только красивый и неожиданный факт, но и мощный инструмент для решения очень многих задач. Некоторые из них приведены в этом параграфе.

Задача 87. Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.

Задача 88. Найдите остаток от деления 3^{102} на 101.

Решение. Так как 101 — простое число, имеем $3^{100} \equiv 1 \pmod{101}$. Отсюда следует, что $3^{102} = 9 \cdot 3^{100} \equiv 9 \pmod{101}$.

Для преподавателей. Конечно, подобные вычислительные упражнения на использование малой теоремы Ферма необходимо давать до тех пор, пока они не перестанут вызывать трудности у школьников.

Задача 89. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.

Решение. Докажем, что $7^{120} - 1$ делится на 11 и на 13. Действительно, $(7^{12})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ и $(7^{10})^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

Задача 90. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

Задача 91. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

Задача 92. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ составное.

Задача 93. Пусть p — простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ для любых целых a и b.

Попробуйте придумать два доказательства: с использованием малой теоремы Ферма и с помощью бинома Ньютона (см. главу «Комбинаторика–2»).

Задача 94. Сумма трёх чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.

Задача 95. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что

а) $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$;

б) $\left[\frac{p^q + q^p}{pq}\right]$ — чётное число, если $p, q \neq 2$.

Задача 96. Пусть p — простое число и a не делится на p. Докажите, что найдётся натуральное число b, для которого $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

Задача 97 (теорема Вильсона). Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Задача 98. Пусть n — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.

Задача 99. а) Пусть p — простое число, отличное от 3. Докажите, что число $111\ldots11$ (p единиц) не делится на p.

б) Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что число $111\ldots11$ ($p-1$ единица) делится на p.

Задача 100. Докажите, что для любого простого числа p разность

$$111\ldots11222\ldots22333\ldots33\ldots888\ldots88999\ldots99-123456789$$

(в первом числе каждая ненулевая цифра написана p раз) делится на p.

Глава 11

Комбинаторика–2

Данная глава является непосредственным продолжением главы «Комбинаторика–1». Перед изучением изложенного здесь материала нужно вспомнить всё, о чём шла речь ранее.

* * *

Для преподавателей. Обязательно предложите школьникам решить несколько задач на уже обсуждавшиеся комбинаторные идеи и продолжайте изучение комбинаторики только в том случае, если решение этих задач не вызывает у них трудностей. В противном случае мы рекомендуем вернуться к пройденному материалу.

Всё содержание этой главы связано с одним очень важным комбинаторным объектом, к изучению которого мы и переходим.

§ 1. Числа сочетаний

Начнём с простой задачи.

Задача 1. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго, независимо от выбора первого ученика, — 29 способами. При этом каждая пара учитывается дважды. Поэтому ответ: $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ способов. (Заметим, что мы практически дословно повторили решение задачи 22 из главы «Комбинаторика–1».)

Предположим теперь, что нам нужно выбрать для участия в математической олимпиаде команду не из двух человек, а из k и в классе учится не 30 человек, а n. Количество способов, которыми это можно сделать, называется *числом сочетаний из n элементов по k* и обозначается C_n^k. (Читается «цэ из эн по ка».) Так, например, $C_2^1 = 2$, $C_3^2 = 3$,

$C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$. Заметим, что при таком определении чисел сочетаний записи C_n^0 также придаётся содержательный смысл — есть только один способ не выбрать никого (выбрать 0) из n человек, т. е. $C_n^0 = 1$ для всех n.

Интересно, что некоторые свойства чисел сочетаний можно легко доказать при помощи простых комбинаторных рассуждений, не использующих формулу для вычисления C_n^k.

Свойство 1.1. Справедливо равенство $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Доказательство. Заметим, что выбор k участников олимпиады равносилен выбору $n-k$ учеников, не участвующих в олимпиаде. Поэтому число способов, которым можно выбрать k человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать $n-k$ человек из n, т. е. $C_n^{n-k} = C_n^k$. □

Свойство 1.2. Справедливо равенство $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Доказательство. Предположим, что в классе учится $n+1$ человек. Зафиксируем какого-нибудь ученика класса (обозначим его через A). Разобьём все возможные команды по k человек на две группы: те, в которые A входит, и те, в которые A не входит. Число команд в первой группе равно C_n^{k-1} — надо дополнить команду ещё $k-1$ учениками, выбрав их из n оставшихся. Число команд во второй группе равно C_n^k — теперь из оставшихся n учеников надо выбрать полную команду. Поэтому $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. □

Для преподавателей. Только что приведённое рассуждение позволило без всяких вычислений доказать содержательный факт. Подобное явление вообще характерно для комбинаторики. Часто несколько минут размышлений (проникновения в комбинаторный смысл задачи) могут избавить от громоздких вычислений. Поэтому мы считаем необходимым обсуждение приведённых доказательств.

Найдём теперь формулу для вычисления C_n^k.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать команду из трёх школьников в классе, в котором учатся 30 человек?

Решение. Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго — 29 способами, третьего — 28 способами. Таким образом, получаем $30 \cdot 29 \cdot 28$ вариантов выбора. Однако каждая команда при этом подсчёте учтена несколько раз: одна и та же тройка учеников может быть выбрана по-разному, например, сначала A, потом B, потом C или

сначала C, потом A, потом B и т. д. Поскольку число перестановок из трёх элементов равно 3!, каждая команда учтена нами ровно $3! = 6$ раз. Поэтому C_{30}^3 равно $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!}$.

Совершенно аналогично может быть получена формула для вычисления C_n^k при произвольных n и k:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Для преподавателей. Числа C_n^k занимают в этой главе центральное место. Поэтому очень важно, чтобы все школьники поняли, что такое число сочетаний и как оно вычисляется. Возможно, перед тем как переходить к общей формуле, придётся обсудить несколько задач, аналогичных задаче 2.

Разберём ещё несколько задач.

Задача 3. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

Ответ. $C_7^4 = 35$.

Задача 4. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого — 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Решение. Первый школьник может выбрать 3 книги для обмена C_6^3 способами, второй — C_8^3 способами. Таким образом, число возможных обменов равно $C_6^3 C_8^3 = 1120$.

Задача 5. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В команду входит либо одна девочка, либо две. Разберём оба случая. Если в команде две девочки, то двух мальчиков к ним можно добавить C_7^2 способами. Если же в команду входит только одна девочка (её можно выбрать двумя способами), то команду можно дополнить тремя мальчиками C_7^3 различными способами. Таким образом, общее число возможных команд равно $C_7^2 + 2C_7^3 = 91$.

Задача 6. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

Решение. Первую команду можно выбрать C_{10}^5 способами. Этот выбор полностью определяет вторую команду. Однако при таком под-

счёте каждая пара команд A и B учитывается дважды: один раз, когда в качестве первой команды выбирается команда A, и второй — когда в качестве первой команды выбирается команда B. Таким образом, ответ: $C_{10}^5/2$.

Для преподавателей. После усвоения этих формул не обязательно вычислять все встречающиеся при решении числа сочетаний — не страшно, если в окончательном ответе будут фигурировать числа C_n^k.

Заметим, что при рассмотрении полученной записи формулы для вычисления чисел C_n^k совершенно неочевидным оказывается уже доказанное нами их первое свойство:

$$C_n^{n-k} = C_n^k.$$

Однако формуле можно придать более симметричный вид, домножив числитель и знаменатель на $(n-k)!$:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \\ = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Теперь первое свойство очевидно.

Упражнение. Докажите второе свойство чисел C_n^k, воспользовавшись формулой.

Для преподавателей. Определению, обсуждению свойств и нахождению формулы для вычисления чисел C_n^k необходимо посвятить отдельное занятие. На этом же занятии полезно решить несколько простых задач. На следующих занятиях нужно постоянно предлагать задачи на эту тему. Их можно брать из числа уже разобранных, а также из следующего списка (который, конечно, легко может быть дополнен преподавателем).

Задача 7. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Задача 8. Рота состоит из трёх офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

Задача 9. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Задача 10. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?

Задача 11. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая её членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

Задача 12. В классе, в котором учатся Петя и Ваня, 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

Задача 13. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ЭПИГРАФ» так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

Задача 14. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в неё вошло не более трёх юношей?

Задача 15. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на чёрных полях шахматной доски?

Задача 16. а) Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой?

б) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?

Задача 17. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы

а) среди них был ровно один туз;

б) среди них был хотя бы один туз?

Задача 18. Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три чётные и нечётные цифры?

Задача 19. Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

Задача 20. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 21. Как известно, для участия в лотерее «Спортлото» нужно указать шесть номеров из имеющихся на карточке 45 номеров.

а) Сколькими способами можно заполнить карточку «Спортлото»?

б) После тиража организаторы лотереи решили подсчитать, каково число возможных вариантов заполнения карточки, при которых могло быть угадано ровно три номера. Помогите им в этом подсчёте.

§ 2. Треугольник Паскаля

Этот параграф замечателен тем, что в нём соединяются практически все изложенные ранее идеи и это приводит к нескольким чрезвычайно красивым комбинаторным фактам.

Для начала предположим, что мы знаем все числа C_n^k для некоторого фиксированного n. Тогда второе свойство:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

позволяет легко вычислить числа C_n^k для всех k. Это соображение приводит к следующему построению.

Поскольку $C_0^0 = 1$, напишем в первой строке 1. В следующей строке напишем значения C_1^0 и C_1^1 (каждое из них равно 1) так, чтобы значение C_0^0 оказалось над промежутком между этими двумя числами (рис. 66). Числа C_2^0 и C_2^2 также равны 1. Их мы запишем в следующей строке (рис. 67), а между ними запишем число C_2^1, равное по второму свойству $C_1^0 + C_1^1$ (рис. 68). Таким образом, число C_2^1 равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от него. По тому же правилу заполняем все последующие строчки: сначала по бокам пишем значения C_n^0 и C_n^n для очередного n (они всегда равны 1), а затем между каждыми двумя числами предыдущей строки записываем их сумму.

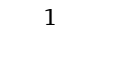


Рис. 66

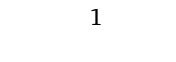


Рис. 67

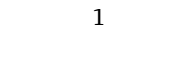


Рис. 68

В результате получаем числовой треугольник, изображённый на рис. 69. Он называется *треугольником Паскаля*.

По построению на $(k+1)$-м месте $(n+1)$-й строки этого треугольника стоит число C_n^k. Поэтому удобно нумеровать строки треугольника Паскаля и места в строках, начиная с нуля. Тогда получится, что C_n^k стоит на k-м месте n-й строки.

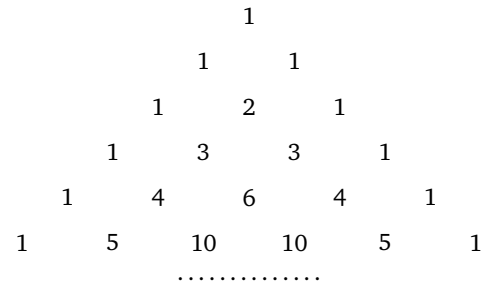


Рис. 69

Для преподавателей. Перед тем как двигаться дальше, необходимо проверить, что школьники полностью усвоили связь между числами C_n^k и треугольником Паскаля. Лучшее упражнение для этого — вычисление чисел сочетаний при помощи описанной процедуры.

Перейдём теперь к изучению свойств треугольника Паскаля. Подсчитаем сумму чисел в его нескольких первых строчках: 1, 2, 4, 8, 16. Возникает гипотеза, что сумма чисел в n-й строке равна 2^n. Докажем это по индукции. База уже проверена. Заметим теперь, что каждое число данной строки входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки. Таким образом, сумма чисел очередной строки в 2 раза больше суммы чисел предыдущей. Индукционный переход завершён.

Отметим, что попутно было доказано ещё одно любопытное свойство треугольника Паскаля: в любой строке (кроме нулевой) сумма чисел, стоящих на чётных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечётных местах.

Записав теперь факт о сумме чисел n-й строки треугольника Паскаля в терминах чисел сочетаний, мы получаем замечательное комбинаторное тождество:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Дадим его прямое комбинаторное доказательство. Утверждается, что общее количество команд, выбираемых из n учеников, если число членов команды не фиксировано, равно 2^n (или, на языке теории множеств: число подмножеств n-элементного множества равно 2^n). Занумеруем учеников класса в произвольном порядке. Каждой команде сопоставим последовательность длины n из нулей и единиц следующим образом: на первом месте поставим 1, если первый ученик

входит в данную команду, и 0 — в противном случае. Так же поступим со вторым, третьим и другими учениками. Таким образом, общее число команд равно числу последовательностей длины n из нулей и единиц. На каждом из n мест такой последовательности может стоять одна из двух цифр. Поэтому общее число последовательностей равно 2^n.

Методические замечания. Наиболее важным моментом в приведённом рассуждении было сопоставление каждой команде последовательности из нулей и единиц. На эту идею следует обратить внимание, так как подобная переформулировка часто бывает полезной при решении многих комбинаторных задач. Мы в качестве примера приведём лишь две из них.

Задача 22. Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает некоторых из них в гости так, что компания ни разу не повторяется (в какой-то из дней он может не приглашать никого). Сколько дней он может так делать?

Задача 23. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

Прежде чем перейти к следующему замечательному свойству треугольника Паскаля, рассмотрим одну задачу, при решении которой неожиданно возникают числа сочетаний.

Задача 24. План города изображён на рис. 70. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вправо» или «вверх». Сколько есть разных маршрутов, ведущих из точки A в точку B?

Решение. Для удобства назовём улицей отрезок изображённой сетки, соединяющий два соседних узла. Ясно, что каждый маршрут содержит ровно 13 улиц, причём 8 из них расположены по горизонтали,

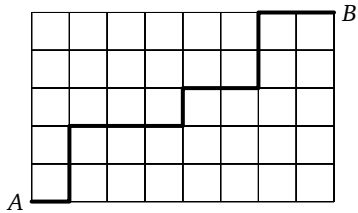


Рис. 70

а 5 — по вертикали. Сопоставим каждому маршруту последовательность букв Г и В следующим образом: при прохождении «горизонтальной» улицы маршрута будем дописывать в последовательность букву Г, а при прохождении «вертикальной» улицы — букву В. Например, маршруту, выделенному на рис. 70, соответствует последовательность ГВВГГГВГГВВГГ. Каждая последовательность содержит 13 букв — 8 букв Г и 5 букв В. Осталось вычислить количество таких последовательностей. Последовательность однозначно задаётся набором из 5 мест, на которых в ней стоят буквы В (или набором из 8 мест, на которых стоят буквы Г). Пять мест из 13 можно выбрать C_{13}^5 способами. Поэтому число возможных последовательностей, а значит, и число возможных маршрутов равно C_{13}^5.

Понятно, что в прямоугольнике $m \times n$ совершенно аналогичные рассуждения приводят к ответу C_{m+n}^m (или, что то же самое, C_{m+n}^n).

Вернёмся теперь к треугольнику Паскаля. Заменим в нём числа точками (узлами) и соединим соседние точки линиями так, как показано на рис. 71. Напишем теперь в вершине треугольника единицу, а в каждом узле — количество путей, которыми можно добраться до него из вершины, двигаясь вниз по линиям сетки. Видно (рис. 72), что снова получается треугольник Паскаля.

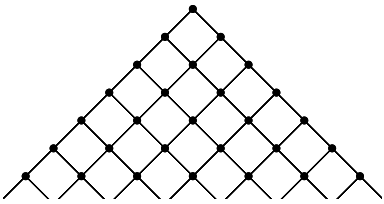


Рис. 71

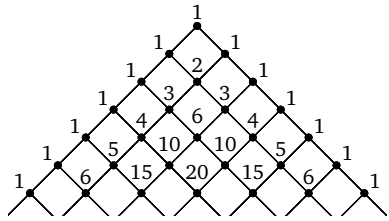


Рис. 72

Доказательство этого совершенно аналогично решению предыдущей задачи. Впрочем, здесь, как и при доказательстве того, что сумма чисел в строке треугольника Паскаля является степенью двойки, можно провести и индукционное рассуждение. А именно: в k-й узел n-й строки можно попасть либо из $(k-1)$-го узла $(n-1)$-й строки, либо из k-го узла $(n-1)$-й строки (рис. 73). Поэтому для нахождения требуемого числа путей достаточно сложить количества путей, ведущих в эти два узла $(n-1)$-й строки. Таким образом, в силу индукционного предположения число путей, ведущих в k-й узел n-й строки, равно $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

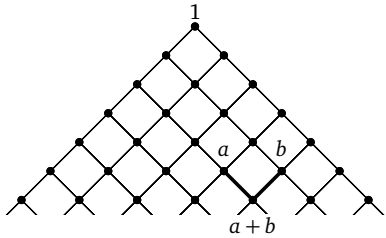


Рис. 73

Методические замечания. Вы, наверное, обратили внимание на то, что оба отмеченных свойства треугольника Паскаля были доказаны двумя способами — с использованием «геометрических» соображений и прямым комбинаторным рассуждением. Полезно использовать оба подхода при решении различных задач и особенно при доказательстве комбинаторных тождеств.

Несколько других свойств треугольника Паскаля мы приводим ниже в качестве задач. Они могут быть сформулированы как в терминах самого треугольника Паскаля, так и в виде комбинаторных тождеств.

Задача 25. Докажите, что из n предметов чётное число предметов можно выбрать 2^{n-1} способами.

Задача 26. Докажите, что

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Для удобства формулировки трёх следующих задач введём дополнительные определения. Будем называть лучи, параллельные сторонам треугольника Паскаля, диагоналями. При этом лучи, параллельные правой стороне, будем называть правыми диагоналями (на рис. 74 выделена одна из них), а левой — левыми диагоналями (рис. 75).

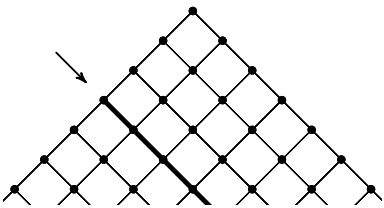


Рис. 74

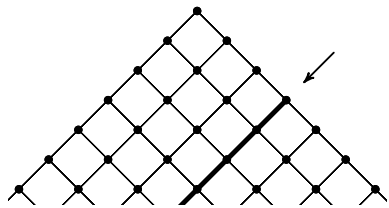


Рис. 75

Задача 27. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом a (рис. 76).

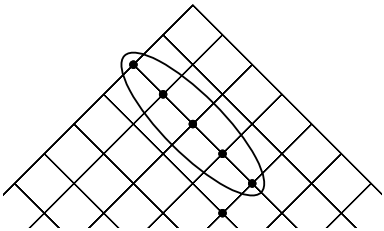


Рис. 76

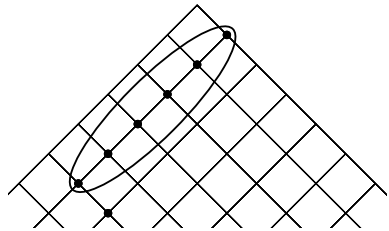


Рис. 77

Задача 28. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел в предыдущей левой диагонали начиная с самого правого вплоть до стоящего слева над числом a (рис. 77).

Задача 29. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются) (рис. 78).

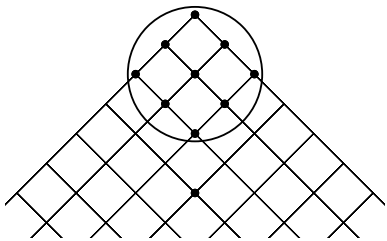


Рис. 78

Задача 30*. Докажите, что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Для преподавателей. Всё содержание этого параграфа (за исключением последней серии задач) может послужить основой одного занятия. Нам кажется, что при правильной подаче материала это занятие может стать одним из самых интересных.

§ 3. Шары и перегородки

Начнём этот параграф с обсуждения двух интересных задач. Обе эти задачи можно решить прямым, технически трудным подсчётом (попробуйте!). Вместе с тем переформулировка условия позволяет легко получить ответ, который в обоих случаях имеет вид C_n^k.

Задача 31. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Решение. Выложим шары в ряд. Для определения расклада наших шаров по шести ящикам разделим ряд пятью перегородками на шесть групп: первая группа для первого ящика, вторая — для второго и т. д. Таким образом, число вариантов раскладки шаров по ящикам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между 20 шарами — 19 промежутков). Поэтому число их возможных расположений равно C_{19}^5.

Упражнение. Сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров по m пронумерованным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Задача 32. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

Решение. Рассмотрим ряд из 25 предметов: 20 одинаковых шаров и 5 одинаковых перегородок, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородки, во второй — расположенные между первой и второй перегородками и т. д. (между какими-то перегородками шаров может и не быть). Поэтому число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т. е. равно C_{25}^5 (ряд определяется теми пятью местами из 25, на которых стоят перегородки).

Отметим, что другое решение задачи 31 можно получить так: положим сначала в каждый ящик по одному шару (теперь наверняка не будет пустых ящиков), а потом воспользуемся результатом задачи 32.

Найденные при решении двух предыдущих задач идеи позволяют изящно и легко решить следующую трудную задачу.

Задача 33. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы

а) k натуральных слагаемых;

б) k неотрицательных целых слагаемых?

(Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

Указание. Представим n в виде суммы n единиц: $n=1+1+\ldots+1$. Назовём теперь эти n единиц «шарами», а k слагаемых из условия задачи — «ящиками».

Методические замечания. Решения задач 31, 32 в очередной раз показали, насколько важна в комбинаторике удачная переформулировка условия задачи. Подробное обсуждение вопроса о раскладке шаров по ящикам объясняется тем, что подобные переформулировки (появление перегородок) оказываются полезными при решении многих внешне не похожих друг на друга задач. Поэтому мы считаем необходимым запомнить эту идею и рекомендуем впоследствии постоянно возвращаться к ней. Для этого можно использовать задачи из следующего списка.

Задача 34. Сколькими способами можно разложить 12 одинаковых монет по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелёк не оказался пустым?

Задача 35. Переплётчик должен переплести 12 одинаковых книг в зелёный, красный или синий переплёты. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 36. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин, на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

Задача 37. Тридцать человек голосуют по пяти предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

Задача 38. В почтовом отделении имеются в продаже открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить в нём двенадцать открыток?

Задача 39. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок.

а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

Задача 40. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать двадцать?

Задача 41. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 чёрных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

Задача 42. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин?

Задача 43. Сколькими способами 4 чёрных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

Задача 44. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование тайное, т. е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

Задача 45. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

Задача 46. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

Задача 47*. Сколькими способами можно представить 1000000 в виде произведения трёх множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

§ 4*. Бином Ньютона

Для преподавателей. Этот параграф отмечен звёздочкой не случайно: он достаточно труден, особенно для школьников 6–8 классов. Однако мы не сочли возможным опустить его, поскольку содержание параграфа теснейшим образом связано с числами C_n^k и треугольником Паскаля. Несомненно также, что бином Ньютона является обязательным элементом математического образования. По усмотрению преподавателя изучение этого параграфа можно перенести на следующий год обучения.

Всем, конечно, хорошо известно тождество

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Попробуем получить формулу для возведения двучлена $(a+b)$ в произвольную степень. Выпишем несколько последовательных степеней этого двучлена:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a + b\\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

Бросается в глаза, что коэффициенты при одночленах в правых частях тождеств образуют соответствующие строчки треугольника Паскаля. Возникает гипотеза, что имеет место тождество

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b^1 + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n.$$

Это разложение действительно верно и называется *биномом Ньютона*. Докажем его. Раскроем скобки в произведении

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)(a+b),$$

не приводя пока подобных слагаемых и не изменяя порядок сомножителей в каждом одночлене. Например,

$$(a+b)(\underline{a}+\underline{b})(\bar{a}+\bar{b}) = a\underline{a}\bar{a} + a\underline{a}\bar{b} + a\underline{b}\bar{a} + a\underline{b}\bar{b} + b\underline{a}\bar{a} + b\underline{a}\bar{b} + b\underline{b}\bar{a} + b\underline{b}\bar{b}.$$

Подсчитаем теперь коэффициент при $a^{n-k}b^k$ после приведения подобных слагаемых. Ясно, что этот коэффициент равен количеству одночленов, в которых b встречается ровно k раз (соответственно a ровно $n-k$ раз). Число таких одночленов легко подсчитать: оно равно C_n^k — количеству способов, которыми можно выбрать k мест для букв b.

Упражнение. Выведите формулу бинома Ньютона по индукции.

§ 5. Дополнительные задачи

Для преподавателей. Этот параграф является вспомогательным: в нём не излагается новый содержательный материал, а просто приводится список задач. Включение этого параграфа в нашу главу преследует две цели. Первая — пополнить запас задач для занятий. Кроме того, после

изучения основных комбинаторных идей необходимо, как мы уже неоднократно отмечали, постоянно возвращаться к пройденному. Повторению можно иногда посвятить даже целое занятие (его можно проводить в виде олимпиады, матдраки и т. д.). Нижеперечисленные задачи составляют достаточно типичный комплект для такого занятия «воспоминания».

Задача 48. Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых красных бусинок и двух одинаковых синих бусинок (рис. 79)?

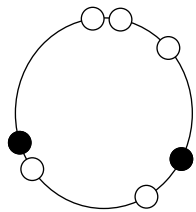


Рис. 79

Задача 49. а) Спортивный клуб насчитывает 30 членов, из которых надо выделить 4 человека для участия в забеге на 1000 метров. Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100 м + 200 м + 300 м + 400 м?

Задача 50. Сколько можно составить шестибуквенных слов (слово — это произвольная последовательность букв), содержащих хотя бы один раз букву А, если можно использовать все 33 буквы алфавита?

Задача 51. Сколькими способами можно построить замкнутую ломаную, вершинами которой являются вершины правильного шестиугольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

Задача 52. Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4, если

а) каждая цифра может встречаться только один раз;

б) каждая цифра может встречаться несколько раз?

Задача 53. У отца 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней он выдаёт сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 54. Труппа театра состоит из 20 артистов. Сколькими способами можно выбрать из неё в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы ни один артист не участвовал в двух спектаклях?

Задача 55. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (цифры могут повторяться).

Задача 56. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были представители всех четырёх мастей?

Задача 57. Сколькими способами можно разложить 3 рублёвые монеты и 10 полтинников в 4 различных пакета?

Задача 58. Сколько существует целых чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

Задача 59. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?

Задача 60. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

Задача 61. На каждом борту лодки должно сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причём десять человек хотят сидеть на левом борту лодки, двенадцать — на правом, а девяти безразлично, где сидеть?

Задача 62*. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с m горизонталями и n вертикалями, которые содержат клетку с координатами (p, q).

Задача 63*. Имеется куб размером $10 \times 10 \times 10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент; причём так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

Глава 12

Инвариант

§ 1. Введение

«…Учитель: Проведём эксперимент. Видите, ребята, на доске написано 11 чисел — 6 нулей и 5 единиц. Теперь 10 раз подряд выполните такую операцию: зачеркните любые два числа и, если они были одинаковы, допишите к оставшимся числам один ноль, а если разные — единицу. Сделайте это у себя в тетрадях. Итак, всё? А теперь я скажу вам, какое число у вас получилось. У всех вас должна была получиться единица!»

Эта сцена вызывает естественный вопрос: откуда же учитель заранее знал, какое число получится у ребят? Ведь операции можно выполнять самыми разными способами. Но всё дело в том, что после каждой операции сумма всех чисел на доске обязательно остаётся нечётной, какой она и была в начале. Проверить это совсем нетрудно — сумма каждый раз меняется на 0 или 2. Значит, и после 10 операций оставшееся число должно быть нечётным, т. е. равным 1. Объяснив это детям, учитель, наверное, не удержится и упомянет волшебное слово «инвариант».

Что же это такое? Говоря по-русски, *инвариант* — это то, что не изменяется, как в нашем примере не менялась чётность суммы цифр.

Вот ещё один пример инварианта.

Задача 1. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причём этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

Решение. Обратите внимание на то, что при любой разрешённой нам операции добавления или выкидывания куска слова количества букв У и Ы в этом куске равны. Это означает, что разность между числом

букв У и букв Ы в слове не изменяется. Проследите это на примере

$$\text{Ы} \to \text{ЫЫУ} \to \text{ЫУУЫЫЫУ} \to \text{ЫУЫЫУ}.$$

Во всех этих словах букв Ы на одну больше, чем букв У. Вернёмся к решению. В слове УЫЫ разность равна (-1), а в слове ЫУУ она равна 1. Значит, из слова УЫЫ нельзя разрешёнными операциями получить слово ЫУУ, и, следовательно, нельзя утверждать, что эти слова обязательно имеют одинаковый смысл.

Это решение иллюстрирует главную идею применения инварианта. Нам даны некие объекты, над которыми разрешено выполнять определённые операции, после чего задаётся вопрос — можно ли из одного объекта получить другой при помощи этих операций? Чтобы ответить на него, мы строим некоторую величину, которая не меняется при указанных операциях. Если значения этой величины для двух указанных объектов не равны, то, конечно, ответ на заданный вопрос отрицателен.

Разберём ещё один пример.

Задача 2. Круг разделён на 6 секторов (рис. 80), в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними секторы. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

Решение. Занумеруем секторы по кругу числами от 1 до 6 (рис. 81) и для любой расстановки фишек рассмотрим величину S — сумму номеров секторов, в которых стоят данные нам 6 фишек (с учётом кратности).

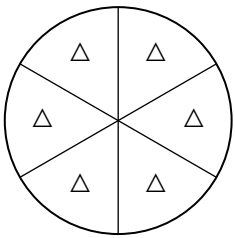


Рис. 80

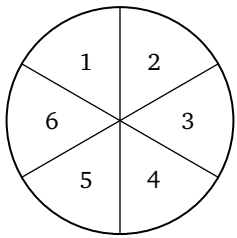


Рис. 81

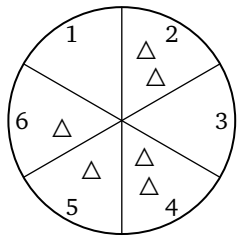


Рис. 82

Пример. Для расположения на рис. 82 имеем

$$S = 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 = 23.$$

Очевидно, что при сдвиге фишки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет чётность. Значит, если сдвигаются

одновременно две фишки, то чётность величины S не меняется — она инвариантна. Но для расстановки на рис. 80 мы имеем $S = 21$. Если же все фишки находятся в одном секторе с номером A, то $S = 6A$ — это чётное число (а 21 — число нечётное). Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все 6 фишек находятся в одном секторе.

Иногда инвариант применяется не для того, чтобы доказать, что какой-то объект нельзя получить из данного, а для того, чтобы узнать, какие объекты можно получить из исходного объекта. Это иллюстрирует следующая простая задача.

Задача 3. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a + b - 1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Решение. Для любого набора из n чисел на доске рассмотрим величину X — сумму всех чисел, уменьшенную на n. Допустим, что с набором произведено описанное в условии преобразование. Как же изменится эта величина? Если сумма всех чисел набора, кроме a и b, равна S, то до преобразования величина X равнялась $S + a + b - n$, а после преобразования

$$X = S + (a + b - 1) - (n - 1) = S + a + b - n.$$

Итак, значение величины X не изменилось, она является инвариантом. Исходно (для набора из условия задачи)

$$X = (1 + 2 + \ldots + 19 + 20) - 20 = 190.$$

Значит, и после 19 операций, когда на доске останется одно число p, X также будет равно 190. Но по своему определению в этот момент X будет равно $p - 1$. Значит, $p = 191$. Следовательно, число, оставшееся на доске, обязательно будет равно 191.

Для преподавателей. Если вы на занятии и услышите решение этой задачи, то оно, скорее всего, будет звучать так: на каждом шаге сумма всех чисел уменьшается на 1. Шагов 19, а сумма исходно была равна 210. Значит, в конце она равна $210 - 19 = 191$. Следует, однако, несмотря на правильность этого решения, объяснить ребятам, что задача — на инвариант. Дело в том, что в данном случае инвариант прост настолько, что допускает совсем тривиальное истолкование. В следующей задаче, хотя она и похожа на задачу 3, такое «упрощение» решения уже не удаётся.

Задача 4. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Подсказка. В качестве инварианта рассмотрите следующую величину: произведение всех чисел на доске, предварительно увеличенных на 1.

Вот ещё несколько замечательных задач на метод инварианта.

Задача 5. На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке? А если чижей и ёлок семь?

Задача 6. В таблице 8×8 одна из клеток закрашена чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

Задача 7. Решите ту же задачу для таблицы 3×3 (рис. 83). Как и прежде, исходно лишь одна клетка (угловая) покрашена в чёрный цвет.

Задача 8. Решите ту же задачу для таблицы 8×8, если исходно в чёрный цвет покрашены все 4 угловые клетки.

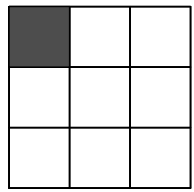


Рис. 83

Указание. Обратите внимание на то, что задача 6 может быть решена всего лишь с помощью соображения чётности числа чёрных клеток в таблице, в отличие от задач 7 и 8.

Задача 9. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1989$. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске стали нулями?

Задача 10. В стране Серобуромалин живёт 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Разберём решение задачи 10. В чём состоит описанная операция? В том, что «пропадают» два хамелеона двух разных цветов и «появ-

ляются» два хамелеона третьего цвета. Если догадаться о том, что величину-инвариант нужно определять по набору чисел (a, b, c), где a, b и c — количества серых, бурых и малиновых хамелеонов соответственно, то дальше решение получается почти сразу же. В самом деле, операция, описанная в условии, означает, что из набора (a, b, c) получается набор $(a-1, b-1, c+2)$, или набор $(a-1, b+2, c-1)$, или набор $(a+2, b-1, c-1)$, — всё зависит от того, в какой цвет перекрашиваются хамелеоны. Очевидно, что разности между числами набора либо не меняются, либо изменяются на 3, а значит, остатки этих разностей при делении на 3 не меняются — они инвариантны. Но вначале $a-b=13-15=-2$, а в случае, если все хамелеоны малиновые, $a-b=0-0=0$. Числа 0 и -2 имеют разные остатки при делении на 3, что и доказывает невозможность такого положения дел в стране. Аналогично разбираются и случаи, когда все хамелеоны стали серыми или все стали бурыми.

Для преподавателей. Если тема «Чётность» уже пройдена и вы решали задачи, в которых чётность фигурировала как инвариант, обязательно напомните об этом вашим ученикам.

Тема «Инвариант» носит довольно абстрактный характер, и даже сам принцип применения инварианта часто остаётся непонятным и сложным для школьников. Именно поэтому надо обратить особое внимание на то, чтобы ребята поняли саму логику применения инварианта. Необходимо особенно тщательно разбирать решения простейших задач темы, наряду с этим стараясь достигнуть того, чтобы каждый из учеников решил какую-то задачу самостоятельно. Иллюстрируйте решения задач многочисленными примерами, постарайтесь сделать изложение как можно более наглядным, а логику решения как можно более прозрачной. Как всегда, постарайтесь вводить незнакомое слово «инвариант» и излагать общую философию инварианта лишь после того, как ребята решат или разберут несколько простейших задач на применение инварианта.

Конечно, главное в решении задач на инвариант придумать сам инвариант. Это настоящее искусство, которым можно овладеть лишь при наличии известного опыта в решении подобных задач. Здесь очень важно не ограничивать фантазию. Не надо, однако, забывать о том, что

а) придумываемые величины должны быть инвариантны;

б) эти инварианты должны давать разные значения для двух данных в условии задачи объектов;

в) необходимо сразу определить класс объектов, для которых будет определяться наша величина.

Разберём ещё один важный пример.

Задача 11. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается изменять знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$?

Решение. Ответ во всех пунктах отрицателен. Доказательство проходит по единой схеме: отметим некоторое множество вершин, обладающее тем свойством, что любой набор из k вершин подряд содержит чётное число отмеченных вершин (рис. 84).

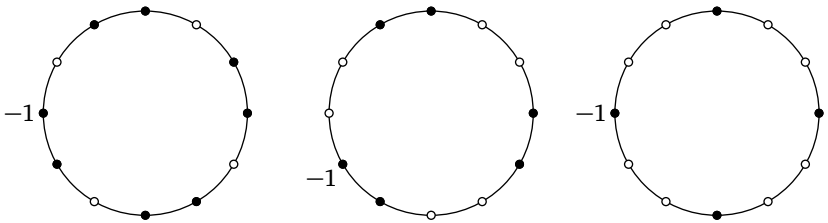


Рис. 84

Проверьте, что это свойство выполняется для множеств, указанных на рисунке.

В качестве инварианта рассмотрим произведение всех чисел в отмеченных вершинах. Вначале оно равно -1, а в случае, когда число -1 сместилось в соседнюю слева (неотмеченную) вершину, равно 1. Инвариантность же введённой величины следует из описанного выше свойства множества отмеченных вершин.

Для преподавателей. В этом решении встретилась распространённая идея в методе инварианта: выделить в каждом объекте какую-то часть, в которой изменения, вызываемые разрешёнными операциями, выглядят особенно просто.

Указание. С помощью этой же идеи решаются и задачи 7 и 8.

Кстати, попробуйте задать ребятам «каверзный» вопрос: мы доказали, что -1 не может сдвинуться в соседнюю слева вершину. А может быть, можно сделать так, чтобы -1 сдвинулась в соседнюю справа вершину?

§ 2. Раскраска

Большое количество задач на инвариант решается с помощью инварианта специфического вида — так называемой «раскраски». Вот типичный пример.

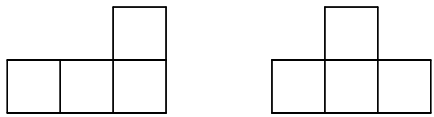
Задача 12. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа (1, 3) (т. е. она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается ещё на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

Решение. Ответ: нельзя. Рассмотрим шахматную раскраску доски в чёрный и белый цвета. Тогда, как легко проверить, каждым своим ходом «верблюд» ходит с одного поля на поле того же цвета; иными словами, цвет поля, на котором стоит «верблюд», — инвариант. Но так как два соседних поля имеют разную окраску, пройти с одного на другое ходом «верблюда» невозможно.

Вот ещё несколько задач на метод раскраски.

Задача 13. а) Докажите, что шахматную доску 8×8 нельзя замостить 15 прямоугольниками 1×4 и одной фигуркой, указанной на рис. 85*а*.

б) Докажите, что доску 10×10 нельзя замостить фигурками, указанными на рис. 85*б*.



а) *б*)

Рис. 85

в) Докажите, что доску 102×102 нельзя замостить прямоугольниками 1×4.

Указание к задаче 13б. Используйте шахматную раскраску доски.

Задача 14. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки, и одна плитка 2×2 потерялась. Её заменили на плитку 1×4. Докажите, что теперь дно коробки вымостить не удастся.

Задача 15. Можно ли доску размерами $4 \times N$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?

Решение. Раскрасим доску $4 \times N$ в 4 цвета так, как это показано на рис. 86. Допустим, что существует обход конём данной доски. Указанная раскраска обладает тем свойством, что если конь стоит на поле цвета 1 (соответственно 2), то следующим ходом он встанет на поле цвета 3 (соответственно 4).

	1	2	1	2	1	2	
	3	4	3	4	3	4	
	4	3	4	3	4	3	
	2	1	2	1	2	1	

Рис. 86

А так как полей цветов 1 и 2 столько же, сколько и полей цветов 3 и 4, в случае наличия обхода конём доски цвета пар $(1, 2)$ и $(3, 4)$ чередуются. Следовательно, всякий раз, как конь встаёт на поле цвета 3, следующим ходом он должен встать на поле цвета 1 или 2 — а легко видеть, что он может встать только на поле цвета 1. Значит, при обходе доски цвета 1 и 3 чередуются. Но это невозможно, так как тогда конь никогда не встанет на поля цветов 2 и 4. Мы пришли к противоречию.

Для преподавателей. 1. Достаточно немного пофантазировать, чтобы самому придумать несколько задач на раскраску; переберите, например, всевозможные вариации фигурок и досок в задаче 13. Помните, что обычно отыскание нужной раскраски нацелено на доказательство отрицательного ответа.

2. Ещё немного о самом методе раскраски. Некоторые варианты этого метода вполне могут рассматриваться как отдельные темы, которым может быть посвящена небольшая (час-полтора) лекция с решением задач. Надо также отметить, что существует много задач, решающихся с помощью раскраски, и имеющих лишь отдалённое отношение к методу инварианта (см. [3, 59]).

§ 3. Инвариант — остаток

Вот ещё семь задач на инвариант. Они примечательны тем, что здесь инвариантом служит остаток по некоторому модулю. Это довольно распространённый случай (см. задачи 2, 6–9 — остаток по модулю 2, задача 10 — по модулю 3).

Задача 16. Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 1985 голов. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов? (Примечание: если, например, у Змея Горыныча осталось лишь три головы, то рубить их ни тем ни другим мечом нельзя.)

Задача 17. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причём в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

Задача 18. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 монет?

Задача 19. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдаёт карточку с числами $a+1$ и $b+1$; второй по карточке с чётными числами a и b выдаёт карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдаёт карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки $(5, 19)$ получить карточку $(1, 1988)$?

Задача 20. На доске написано число 8^n. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр и т. д., до тех пор пока не получится однозначное число. Что это за число, если $n = 1989$?

Задача 21. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: A, B и C. Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если исходно амёб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука и типа C — 22 штуки?

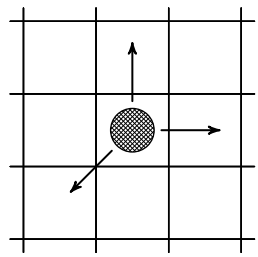


Рис. 87

Задача 22. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз-влево (рис. 87). Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях ровно по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?

Попробуем промоделировать сам процесс решения задачи 19.

Для преподавателей. Если вы излагаете решение школьникам, то попробуйте представить его именно в форме рассказа о том, как вы к нему пришли, как догадались о том, что задача — на инвариант, и т. д.

Итак, внешний вид задачи — дан набор разрешённых операций, и нас просят выяснить, можно ли из одной карточки получить другую — наталкивает нас на то, что нужно искать инвариант. Начнём поиск.

1-я операция: $(a, b) \to (a+1, b+1)$. Что же не меняется при этой операции? Ну конечно же, разность чисел на карточке:

$$(a+1)-(b+1)=a-b.$$

Но вот уже 2-я операция меняет разность:

$$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}$$

— она делит её пополам. 3-я операция складывает эти разности:

$$a-c=(a-b)+(b-c).$$

Всё это приводит нас к мысли, что, видимо, инвариантом является не сама разность, а… что же? Что можно сделать с этим числом? Вполне возможно, что ответ на этот вопрос не сразу придёт вам на ум. Ну что же, займёмся небольшим исследованием. Наудачу попробуем получить какие-то карточки из данной:

(1) $(5, 19) \to (6, 20)$;

(2) $(6, 20) \to (3, 10)$;

(3) $(3, 10) \to (20, 27)$;

(4) $(6, 20), (20, 27) \to (6, 27)$.

Пока хватит. Теперь уже можно посмотреть на плоды наших трудов. Мы имеем набор карточек: $(5, 19)$, $(6, 20)$, $(3, 10)$, $(20, 27)$, $(6, 27)$. Вычислим для них разность чисел на карточке и получим набор чисел: 14, 14, 7, 7, 21. Тут, конечно, мы сразу догадались, что нужно доказывать! Конечно же, то, что наша разность $a-b$ всегда будет делиться на 7. Доказывается это очень просто, стоит только ещё раз посмотреть, что происходит с разностью при разрешённых операциях (см. выше). Но у той карточки, которую нам хочется получить, — $(1, 1988)$ — разность чисел равна $1-1988=-1987$ и на 7 не делится. Задача решена.

§ 4. Разные задачи

Задача 23. В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что $m = n$.

Примечание. Как ни странно, но в некотором смысле это тоже задача на инвариант.

Задача 24. На столе стоят 7 стаканов — все вверх дном. Разрешается за один ход перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Задача 25. В вершинах куба расставлены числа: 7 нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными? А можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

Задача 26. Круг разделён на 6 секторов, как в задаче 2, и в них по часовой стрелке расставлены числа: 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешается прибавить по единице к числам в любых двух соседних секторах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы все числа в секторах были одинаковыми?

Задача 27. В задаче 19 выясните, какие карточки можно получить из карточки $(5, 19)$, а какие нельзя.

Задача 28. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трёх камней?

Задача 29. В ряд выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, n$. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Может ли после 1989 таких операций порядок чисел оказаться исходным?

Задача 30. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $(a+b)/\sqrt{2}$ и $(a-b)/\sqrt{2}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ из тройки $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$?

Эти упражнения в среднем более трудны, чем большинство из задач 1–22, но при этом они могут послужить хорошими задачами для домашнего исследования.

Для преподавателей. 1. Задачи на инвариант чрезвычайно распространены. Так, например, каждый год на Санкт-Петербургской (Ленинград-

ской) городской олимпиаде не менее двух или трёх задач решаются методом инварианта. Это следует сообщить ребятам — возможно, это подтолкнёт их к более детальному изучению этой темы (хотя бы и из соображений спортивного характера).

2. Идея инварианта проникает в самые различные области науки. Если ваши ученики достаточно знакомы с физикой, то в качестве примера вы можете разобрать с ними различные следствия закона сохранения энергии, а также теоремы типа закона сохранения импульса и т. п.

3. Школьники должны понять, что если подобранный инвариант даёт одинаковые значения для двух данных объектов, то это ещё совсем не означает, что их можно получить друг из друга с помощью указанных в задаче операций. Это довольно стандартное заблуждение, которое обычно появляется при первом знакомстве с методом инварианта. Придумайте во время занятия несколько простейших примеров, опровергающих эту «идею».

4. Напомним ещё раз некоторые стандартные инварианты:

а) остаток по некоторому модулю — задачи 2, 6–10, 16–22, 24;

б) выделение части объекта — задачи 7, 8, 11;

в) раскраска — задачи 12–15;

г) алгебраическое выражение от данных задачи — задачи 4, 30.

Глава 13

Графы–2

В этой главе продолжается изучение графов, начатое в первой части книги. Почему же мы считаем необходимым вернуться к этой теме? Во-первых, графы являются интересным объектом изучения. А во-вторых, и это самое главное, элементарные рассуждения, связанные с графами, позволяют непосредственно приблизиться к серьёзной математике (в первую очередь это относится к § 1 и 3 этой главы).

Подчеркнём, что в этой главе мы рассматриваем только графы, в которых каждые две вершины соединены не более чем одним ребром.

§ 1. Изоморфизм

Как уже отмечалось, один и тот же граф можно нарисовать разными способами. Так, одной и той же схеме знакомств или одной и той же системе авиалиний могут соответствовать внешне не похожие друг на друга картинки. Рассмотрим следующий пример: на турнире пяти команд A, B, C, D, E команда A сыграла с B, D и E, кроме того, C сыграла с B и D, а D с E. Обе картинки, изображённые на рис. 88, правильно отражают описанную ситуацию.

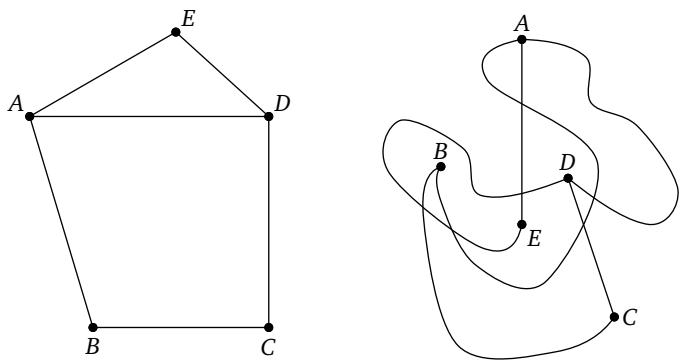


Рис. 88

Дадим точное определение.

Определение. Два графа называются *изоморфными*, если у них поровну вершин (по n) и вершины каждого графа можно занумеровать числами от 1 до n так, чтобы вершины первого графа были соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие (занумерованные теми же числами) вершины второго графа.

Теперь мы можем вернуть долг и доказать, что графы, изображённые на рис. 27*б* и 23 (см. главу «Графы-1»; эти графы воспроизведены здесь на рис. 89), не изоморфны.

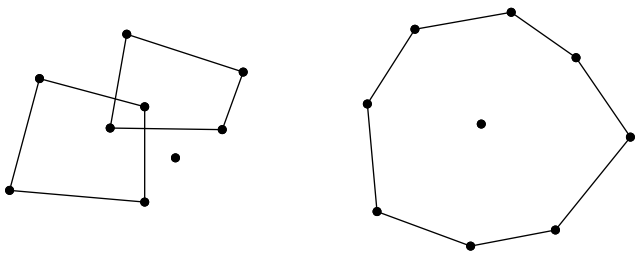


Рис. 89

Дело в том, что эти графы имеют разное число компонент связности: первый — три, а второй — две.

Покажем, что изоморфные графы должны иметь равное количество компонент связности. Для этого достаточно заметить, что если две вершины первого графа принадлежат одной компоненте, то они соединены путём, а тогда и соответствующие им вершины второго графа также соединены путём, т. е. лежат в одной компоненте связности.

Задача 1. Изоморфны ли графы в парах, изображённых на рис. 90?

Решение. В пунктах *а*) и *б*) приведены изоморфные графы, что доказывается рисунками 91 и 92.

Во всех остальных пунктах графы не изоморфны. Подсказки:

в) разное число вершин;

г) разное число рёбер;

д) разное число компонент связности;

е) в первом графе есть вершина, из которой выходит 4 ребра, а во втором — нет;

ж) в первом графе есть ребро, после удаления которого граф распадается на две компоненты связности, а во втором такого ребра нет.

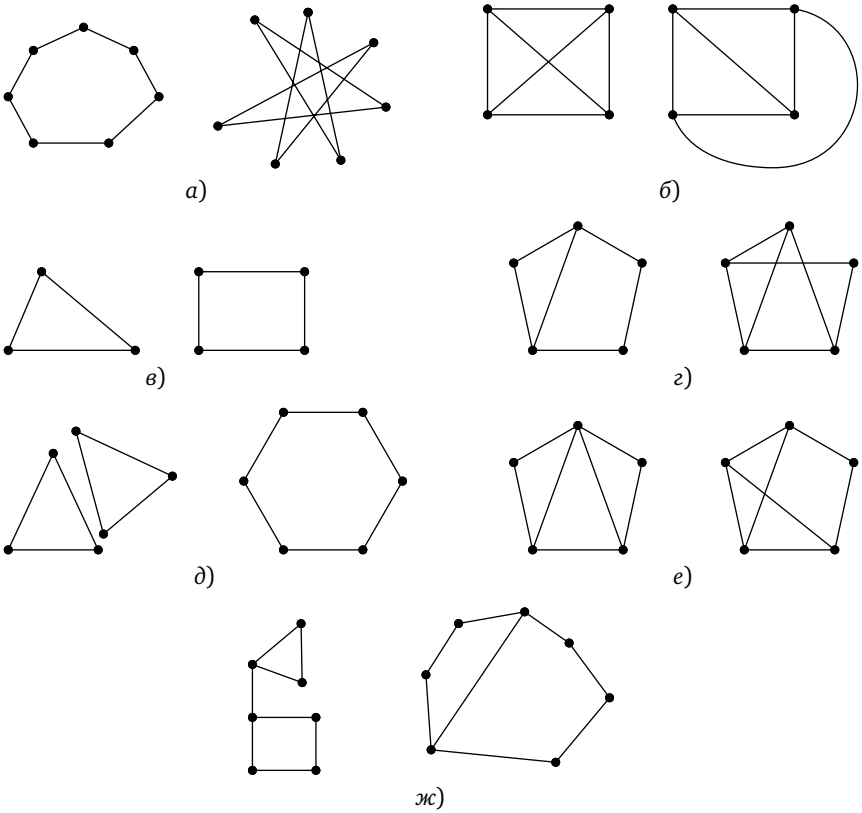


Рис. 90

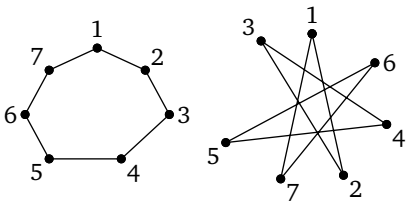


Рис. 91

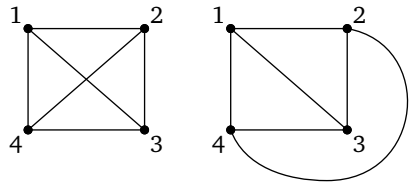


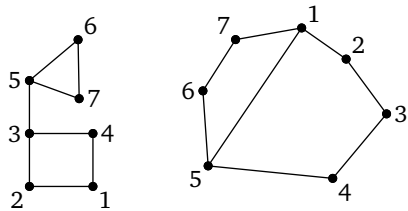
Рис. 92

То, что графы на рис. 90*ж* не изоморфны, можно показать и другим способом. Будем рассматривать замкнутые пути, не проходящие через одну и ту же вершину. В первом графе таких путей два: длины 3 (длина пути — это число рёбер, из которых он состоит) и длины 4, а во втором — три, их длины — 4, 5, 7.

Для преподавателей. Школьники обычно интуитивно хорошо понимают, что такое «одинаковые» графы. Поэтому полезно и интересно попробовать заставить их самостоятельно дать точное определение изоморфности графов. При этом надо быть готовым к «определениям» типа: это графы с одинаковым числом вершин и рёбер и т. п. Можно попытаться превратить в свободное обсуждение и решение задачи 1, предоставив школьникам возможность самим искать различные критерии неизоморфности графов.

В решении задачи 1 было вскользь упомянуто важное понятие. Дадим аккуратное определение.

Определение. *Циклом* называется замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину. При обсуждении пункта *ж*) задачи 1 мы заметили, что в графе, изображённом на рис. 93*а*, два цикла: 1–2–3–4–1 и 5–6–7–5; а в графе на рис. 93*б* — три цикла: 1–5–6–7–1, 1–2–3–4–5–1, 1–2–3–4–5–6–7–1.



а) *б*)

Рис. 93

Вот ещё две задачи, связанные с введёнными определениями.

Задача 2. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Задача 3. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, …, n, n.

Задача 4. Верно ли, что два графа изоморфны, если

а) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9;

б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3;

в) они связны, без циклов и содержат по 6 рёбер?

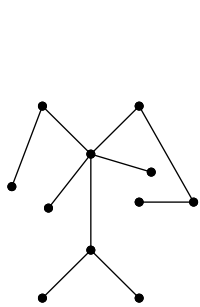
Задача 5. В связном графе степени четырёх вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

§ 2. Деревья

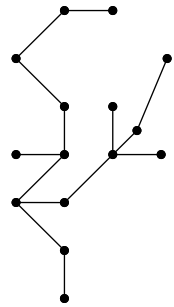
В этом параграфе речь пойдёт о графах, устроенных достаточно просто, однако играющих заметную роль в изучаемой теории.

Определение. *Деревом* называется связный граф, не имеющий циклов.

Например, графы, изображённые на рис. 94, являются деревьями, а изображённые на рис. 95 и 96 — нет.



а)



б)

Рис. 94

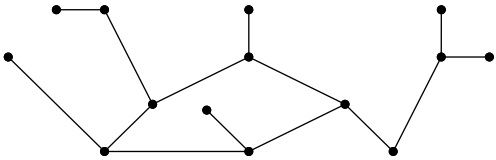


Рис. 95

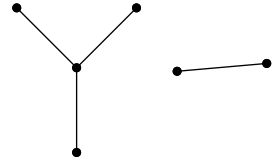


Рис. 96

Столь странное название этого класса графов можно объяснить тем, что некоторые из них действительно чем-то похожи на деревья (рис.94*б*).

При изучении свойств деревьев полезным оказывается понятие простого пути. Понятие пути уже было определено в главе «Графы–1». *Простым путём* называется путь, в котором никакое ребро не встречается дважды.

Задача 6. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путём, является деревом.

Решение. Очевидно, что данный граф связен. Предположим теперь, что в нём есть цикл. Тогда любые две вершины этого цикла соеди-

нены по крайней мере двумя простыми путями (рис. 97). Получили противоречие, значит, наше предположение неверно.

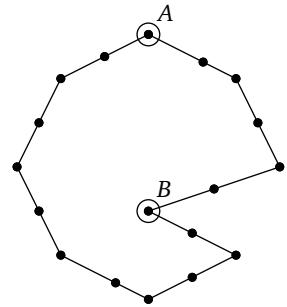


Рис. 97

Докажем теперь утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи.

Задача 7. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путём.

Решение. Предположим противное и рассмотрим те две вершины, которые соединены двумя разными простыми путями. На первый взгляд кажется, что, пройдя от одной вершины к другой по первому пути и вернувшись по второму, мы получим цикл. К сожалению, это не совсем так. Дело в том, что первый и второй пути могут иметь общие вершины (кроме начала и конца; см. рис. 98), а по определению цикла вершины в нём не должны повторяться. Для того чтобы выделить настоящий цикл из уже полученного, нужно сделать следующее:

1) выбрать первую точку, в которой пути расходятся (на рис. 98 это точка A);

2) за выбранной точкой на пути № 1 найти первую точку, принадлежащую также и пути № 2 (на рис. 98 — точка B).

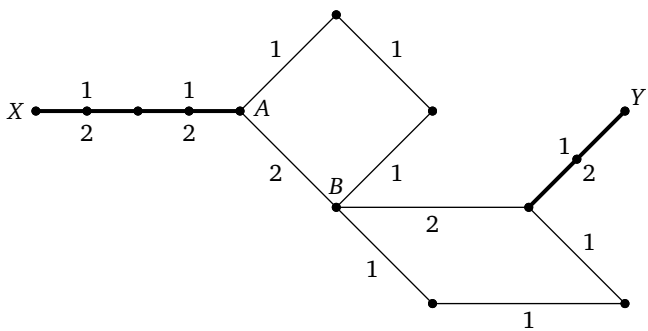


Рис. 98

Теперь участки первого и второго пути между точками A и B образуют простой цикл.

Для преподавателей. В первых двух фразах записанного решения содержится его основная идея. Дальнейшие технические подробности имеет смысл обсуждать только в достаточно сильном кружке.

Из утверждений задач 6 и 7 следует, что можно дать и другое определение дерева.

Дерево — это граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путём.

При решении следующих задач мы будем использовать как одно, так и другое определение.

Задача 8. Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*).

Решение. Рассмотрим произвольную вершину дерева и пойдём по любому выходящему из неё ребру в другую вершину. Если из новой вершины больше рёбер не выходит, то мы остаёмся в ней, а в противном случае идём по любому другому ребру дальше. Понятно, что в этом путешествии мы никогда не сможем попасть в вершину, в которой уже побывали: это означало бы наличие цикла. Так как у графа конечное число вершин, наше путешествие обязательно должно закончиться. Но закончиться оно может только в висячей вершине!

Утверждение задачи 8 называется леммой о висячей вершине. Эта лемма будет содержательно использоваться при решении многих задач.

Для преподавателей. Начиная с этого параграфа мы будем формулировать задачи как на языке теории графов, так и в «игровом» виде. По-видимому, во время занятий не надо злоупотреблять ни тем ни другим типом формулировок. С одной стороны, надо приучать школьников к точному формальному языку, а с другой — видеть за игровой формулировкой истинный смысл задачи.

Задача 9. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нём есть цикл.

Задача 10. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

Задача 11. В стране Древляндия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

Решение. Из условия задачи следует, что граф дорог Древляндии — дерево. У этого дерева есть висячая вершина. Удалим её вместе с ребром, которое из неё выходит. Оставшийся граф также является деревом. Поэтому у него есть висячая вершина, которую мы также удалим вместе с выходящим из неё ребром. Проделав эту операцию 100 раз,

мы получим граф, состоящий из одной вершины (в котором, конечно, нет рёбер). Поскольку каждый раз удалялось ровно одно ребро, сначала их было 100.

Совершенно аналогично можно доказать и общий факт.

Теорема. *В дереве число вершин на* 1 *больше числа рёбер.*

Верен и обратный факт (он используется намного реже).

Задача 12. Докажите, что связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.

* * *

Задача 13. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Решение. Будем рассматривать волейбольную сетку как граф, вершинами которого являются узлы сетки, а рёбрами — верёвочки. В этом графе нужно удалить как можно больше рёбер так, чтобы он остался связным. Будем убирать рёбра по очереди до тех пор, пока это возможно. Заметим, что если в графе есть цикл, то возможно удаление любого ребра этого цикла. Связный граф, не имеющий циклов, является деревом. Поэтому, только получив дерево, мы не сможем убрать ни одного ребра. Подсчитаем число рёбер в нашем графе в этот момент. Количество вершин осталось тем же — $51 \cdot 601 = 30651$. Число рёбер в дереве на 1 меньше числа вершин, и, следовательно, в нашем дереве будет 30650 рёбер. Сначала же их было $601 \cdot 50 + 600 \cdot 51 = 60650$. Таким образом, можно удалить 30000 рёбер, т. е. у волейбольной сетки можно перерезать 30000 верёвочек (но не более!).

Методические замечания. Отметим ключевую идею этого решения — выделение «максимального» дерева, содержащегося в данном графе. Конечно, такое «максимальное» дерево не единственно. Это соображение (выделение максимального дерева) является основным и при решении ещё трёх задач.

Задача 14. В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

Задача 15. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.

Задача 16*. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелётов; б) 196 перелётов.

Для преподавателей. Понятию дерева, а также лемме о висячей вершине и связанным с ней задачам естественно посвятить отдельное занятие. Задачи из цикла о максимальном дереве можно предлагать по одной, подробно обсудив основную идею при разборе первой из них.

§ 3. Теорема Эйлера

В этом параграфе доказывается классическая теорема, носящая имя великого математика Леонарда Эйлера. В связи с этим обсуждаются свойства важного класса графов, к определению которого мы сейчас и переходим.

Определение. Граф, который можно нарисовать так, чтобы его рёбра не пересекались (нигде, кроме вершин), называется *плоским*.

Так, например, граф, изображённый на рис. 99, плоский (изоморфный ему граф изображён на рис. 100), а на рис. 101 — не плоский (это содержательное утверждение будет доказано позже).

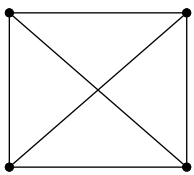


Рис. 99

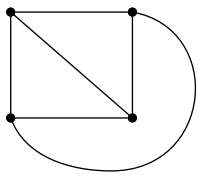


Рис. 100

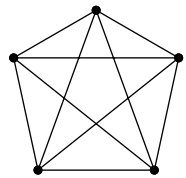


Рис. 101

Будем говорить, что плоский граф правильно нарисован, если его рёбра на рисунке не пересекаются.

Для преподавателей. Может быть, вы уже заметили, что иногда мы не очень точно используем понятие графа — не различаем разные, но изоморфные графы. Эта неточность особенно бросается в глаза при определении плоского графа. Если вы считаете возможным, то обсудите это место со школьниками. Но главное, чтобы они поняли, что граф может быть плоским, даже если его рёбра на картинке пересекаются (рис. 99).

Заметим, что правильно нарисованный плоский граф разбивает плоскость на куски. Обозначим число этих кусков через F, число вершин графа — через V и число рёбер — через E. Так, для графа, изображённого на рис. 100, получаем $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$ (внешний кусок плоскости тоже учитывается).

Справедлива следующая теорема.

Теорема (Эйлера). *Для правильно нарисованного связного плоского графа имеет место равенство* $V - E + F = 2$.

Доказательство. Повторим рассуждение, использованное при решении задачи о волейбольной сетке: будем удалять рёбра до тех пор, пока не получим дерево. Посмотрим, как при удалении очередного ребра изменяются величины V, E и F. Ясно, что количество вершин не изменяется, а количество рёбер уменьшается на 1. Число кусков также уменьшается на 1 (рис. 102), так как при удалении ребра два примыкающих к нему куска сливаются в один. Поэтому величина $V - E + F$ при такой операции не изменяется (инвариант!). Так как для полученного дерева $V - E = 1$ (по теореме из предыдущего параграфа) и $F = 1$, получаем, что $V - E + F = 2$, и, следовательно, для исходного графа также выполняется это равенство. □

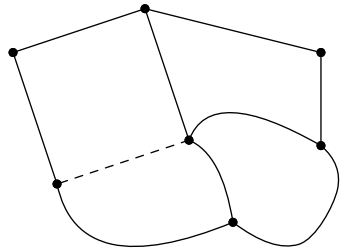


Рис. 102

Равенство $V - E + F = 2$ называется *формулой Эйлера*.

Теорема Эйлера — очень сильный факт, и из него можно получить много красивых и интересных следствий. Начнём с простой задачи.

Задача 17. В стране Озёрная 7 озёр, соединённых между собой 10 каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

Следующая задача несколько труднее.

Задача 18. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Решение. Будем считать отмеченные точки и вершины квадрата вершинами, а соединяющие их отрезки и стороны квадрата — рёбрами плоского графа. Для каждого из кусков, на которые этот граф разби-

вает плоскость, подсчитаем число ограничивающих его рёбер и все полученные числа сложим. Поскольку каждое ребро разделяет два куска, в итоге получим удвоенное число рёбер. Так как все куски, кроме внешнего, — треугольники, а внешний кусок ограничен 4 рёбрами, получаем

$$3(F-1)+4=2E, \quad \text{т. е.} \quad E=\frac{3(F-1)}{2}+2.$$

Заметим, что число вершин нашего графа равно 24, и подставим количества вершин и рёбер в формулу Эйлера:

$$24-\left(\frac{3(F-1)}{2}+2\right)+F=2.$$

Отсюда находим $F=43$. Таким образом, число треугольников, на которые разбился квадрат, равно 42.

Задача 19. Докажите, что для плоского графа, имеющего более одного ребра, справедливо неравенство $2E \geqslant 3F$.

Перейдём теперь к доказательству некоторых классических следствий теоремы Эйлера. Начнём с неравенства.

Задача 20. Для плоского связного графа, имеющего более одного ребра, справедливо неравенство $E \leqslant 3V-6$.

Решение. Из предыдущей задачи известно, что $2E \geqslant 3F$. Подставим это неравенство в формулу Эйлера. Получим

$$V-E+\frac{2E}{3} \geqslant 2.$$

Следовательно, $E \leqslant 3V-6$, что и требовалось.

Задача 21. Докажите, что для любого плоского графа (в том числе и несвязного), имеющего более одного ребра, справедливо неравенство $E \leqslant 3V-6$.

Указание. Рассмотрите компоненты связности.

Замечательно, что только что доказанное неравенство позволяет находить графы, не являющиеся плоскими. Так, например, можно легко доказать сформулированное в начале параграфа утверждение.

Задача 22. Граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, не является плоским.

Указание. Для этого графа не выполнено неравенство $E \leqslant 3V-6$.

Граф, каждая вершина которого соединена ребром с любой другой вершиной, называется *полным*. На рис. 103 изображён полный граф с 6 вершинами.

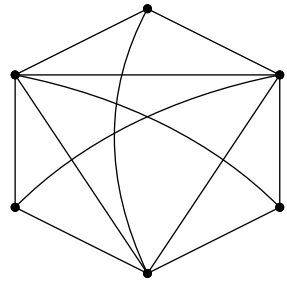


Рис. 103

Из результата задачи 22 следует, что полный граф более чем с 4 вершинами не является плоским.

Задача 23. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Указание. Для графа из этой задачи неравенство $2E \geqslant 3F$ можно усилить. Поскольку в этом графе каждый кусок должен быть ограничен по меньшей мере 4 рёбрами, рассуждения, аналогичные решению задачи 19, приводят к неравенству $E \geqslant 2F$.

Задача 24. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, не плоский.

При помощи неравенства $E \leqslant 3V - 6$ можно доказать и следующие три изящных факта.

Задача 25. Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

Задача 26. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный», либо «синий» граф не является плоским.

Задача 27*. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причём так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

Для преподавателей. Подчеркнём ещё раз, что материал этого параграфа очень важен. Мы рекомендуем посвятить отдельное занятие теореме Эйлера и её следствиям и не забывать возвращаться к задачам на эту тему в дальнейшем.

§ 4. Разные задачи

В этом параграфе собрано несколько задач из разных разделов теории графов. При их решении необходимо сочетать идеи, изложен-

ные в этой главе и в главе «Графы–1», с другими содержательными соображениями. Поэтому эти задачи, как правило, трудны.

Задача 28. Докажите, что связный граф, имеющий не более двух нечётных вершин, можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз.

План решения. Разберём случай, когда граф не имеет нечётных вершин. Проведём доказательство с помощью индукции по числу рёбер графа. База (граф без рёбер) очевидна. Для доказательства индукционного перехода рассмотрим произвольный связный граф, степени всех вершин которого чётны. Поскольку в этом графе нет висячих вершин, он не является деревом, и, следовательно, в нём есть цикл. Временно удалим из графа рёбра этого цикла. Ясно, что граф распадётся на несколько компонент связности, имеющих общие вершины с выкинутым циклом и удовлетворяющих условиям теоремы (рис. 104). В силу индукционного предположения каждую из этих компонент связности можно нарисовать требуемым образом. Теперь ясно как нарисовать требуемым образом исходный граф: обходим цикл и, попадая в вершину, относящуюся к какой-то компоненте, переходим в неё и рисуем её, в конце возвращаясь в ту же вершину, после чего продолжаем движение по циклу.

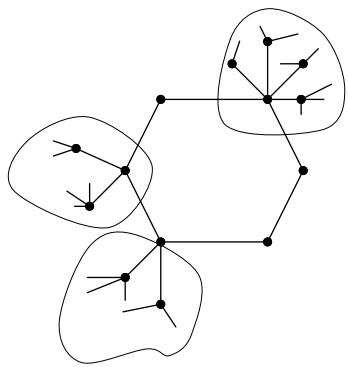


Рис. 104

Доказательство для случая графа с двумя нечётными вершинами аналогично (нужно временно удалить путь, соединяющий две нечётные вершины).

Напомним, что граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз, называется *эйлеровым*.

В главе «Графы–1» было доказано, что эйлеров граф имеет не более двух нечётных вершин. Только что разобранная задача позволяет сформулировать теорему.

Теорема. *Граф эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и имеет не более двух нечётных вершин.*

Вот ещё три задачи.

Задача 29. Можно ли составить решётку, изображённую на рис. 105, а) из 5 ломаных длины 8; б) из 8 ломаных длины 5 (длина стороны клетки равна 1)?

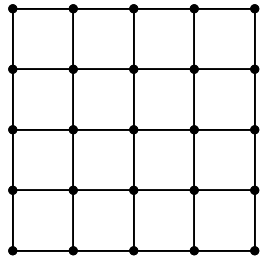


Рис. 105

Задача 30. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (т. е. не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

Задача 31. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

* * *

Задача 32. На конференции присутствуют 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

Задача 33. Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

Задача 34*. Расстоянием между двумя произвольными вершинами дерева будем называть длину простого пути, соединяющего их. Удалённостью вершины дерева назовём сумму расстояний от неё до всех остальных вершин. Докажите, что в дереве, у которого есть две вершины с удалённостями, отличающимися на 1, нечётное число вершин.

Задача 35. Дима нарисовал на доске 7 графов, каждый из которых является деревом с 6 вершинами. Докажите, что среди них есть два изоморфных.

Задача 36. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что

а) можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;

б) из некоторого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой (пользоваться можно только выбранным видом транспорта);

в) каждый город обладает свойством из пункта б);

г) можно выбрать вид транспорта так, чтобы, пользуясь только им, можно было добраться из любого города до любого другого не более, чем с двумя пересадками.

Задача 37. Каждое из рёбер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми одного цвета.

Задача 38. Каждое из рёбер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трёх цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми одного цвета.

Задача 39*. Каждое из рёбер полного графа с 9 вершинами покрашено в синий или красный цвет. Докажите, что либо есть четыре вершины, все рёбра между которыми синие, либо есть три вершины, все рёбра между которыми красные.

Задача 40*. Каждое из рёбер полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть четыре вершины, все рёбра между которыми одного цвета.

Для преподавателей. Несколько слов о том, как пользоваться материалом этого параграфа. Теорема об эйлеровых графах является содержательным теоретическим результатом, поэтому её необходимо тщательно разобрать на занятии. Остальные задачи этого параграфа можно использовать произвольным образом. Самые трудные задачи (помеченные звёздочкой) естественно предлагать школьникам для домашнего размышления.

§ 5. Ориентированные графы

Основным объектом этого параграфа является ориентированный граф, т. е. граф, на рёбрах которого расставлены стрелки. Фундаментальных теорем об ориентированных графах (таких, как теорема Эйлера) мы доказывать не будем. Появление этого параграфа объясняется тем, что понятие ориентированного графа является обязательным элементом общематематической культуры и, кроме того, такие графы встречаются при решении многих задач. Некоторые из них представлены в этом параграфе.

Задача 41. Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озёр, соединённых между собой реками. Из каждого озера

вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

Указание. Общее количество «втекающих» рек должно быть равно общему количеству «вытекающих» рек.

Вот ещё одна подобная задача.

Задача 42. В некоторой стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

* * *

Следующие две задачи достаточно просты. Их объединяет то, что в каждой из них нужно расставить стрелки на рёбрах неориентированного графа так, чтобы выполнялись некоторые условия.

Задача 43. В некотором государстве каждый город соединён с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

Задача 44. Докажите, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

* * *

Для решения следующих двух задач полезно вспомнить понятие эйлерова графа и доказательство достаточного условия эйлеровости.

Задача 45. В связном графе степени всех вершин чётны. Докажите, что на рёбрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой;

б) для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны.

Задача 46. На рёбрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.

* * *

Решения задач следующего цикла легко оформляются при помощи метода математической индукции.

Задача 47. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

Решение. Индукция по числу городов. База очевидна. Для доказательства индукционного перехода удалим сначала один из городов. В силу индукционного предположения есть город A с требуемым свойством. Вспомним теперь про удалённый город. Если в него ведёт хотя бы одна дорога, то город A искомый. В противном случае сам удалённый город удовлетворяет требуемому свойству.

Задача 48. Несколько команд сыграли между собой круговой турнир по волейболу. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо существует такая команда C, что A выиграла у C, а C — у B.

а) Докажите, что есть команда, которая сильнее всех.

б) Докажите, что команда, выигравшая турнир, сильнее всех.

Задача 49. В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения не более, чем на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

Задача 50. Двадцать команд сыграли круговой турнир по волейболу. Докажите, что команды можно занумеровать числами от 1 до 20 так, что 1-я команда выиграла у 2-й, 2-я — у 3-й, …, 19-я — у 20-й.

* * *

И наконец три последние задачи этого параграфа.

Задача 51. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся такие команды A, B и C, что A выиграла у B, В выиграла у C, а C выиграла у A.

Задача 52. В некотором государстве 101 город.

а) Каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.

б) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

Задача 53*. В некоторой стране на всех дорогах введено одностороннее движение, причём из любого города в любой другой можно добраться, проехав не более чем по двум дорогам. Одну дорогу закрыли на ремонт так, что из каждого города по-прежнему можно добраться до каждого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать, проехав не более чем по трём дорогам.

Глава 14

Геометрия

Часто приходится слышать вопрос: «А зачем вообще нужна школьная геометрия? Ведь это „наука в себе“ — она не имеет никаких продолжений в высшей математике, частенько излишне сложна и запутанна».

Ответ (не претендующий на полноту) таков: то, что вы имеете в виду, задавая этот вопрос, та часть «школьной геометрии», которая кажется вам лишённой всякого смысла, есть замечательный полигон для выработки хорошего, логичного и последовательного мышления. Эта «наука» есть не что иное, как большая игра по неким аксиоматическим правилам, выработанным ещё древними греками, — ведь Евклиду и его предшественникам (равно как и последователям) казалось, что эти правила стопроцентно точно отражают закономерности окружающего нас физического мира.

Игра эта, однако, зашла так далеко, что может сравниться, пожалуй, лишь с шахматами. Это привело к неимоверному разрастанию замечательной игры в геометрию, так что теперь полным знанием её секретов похвастаться, видимо, не может никто. Этим, а также и соображениями размера текста объясняется то, что в этой главе рассматриваются лишь некоторые «плодотворные дебютные идеи».

Помимо такого подхода к геометрии, необходимо помнить и о том, что геометрия, безусловно, является неотъемлемой частью математики и у неё существует много связей со смежными областями; компетентный преподаватель найдёт здесь отличную возможность продемонстрировать идейное единство математики.

* * *

Наше изложение не согласовано с существующими ныне школьными учебниками. Основная причина заключается в том, что мы и не хотим привязывать наше изложение к какому-либо учебнику — нам хотелось бы, чтобы преподаватель сам мог выбирать темы для занятия,

сообразуясь с уровнем кружка или факультатива. При этом не нужно слепо следовать школьной программе — нужно опираться на неё.

Не стоит удивляться тому, что большинство задач практически не отличается по формулировке от задач из учебников. И в самом деле, странно требовать «олимпиадных» задач по «школьной» геометрии (к тому же и в необходимом количестве — само выражение «олимпиадная» подразумевает нешкольность, выход за рамки программы). Дело ещё и в том, что геометрическая тематика в школе достаточно разработана и представлена в учебниках геометрии, так что в некоторых местах мы просто будем отсылать вас к учебникам и другим книгам в поисках соответствующего задачного материала.

§ 1. Два неравенства

Хотя «школьная» геометрия обычно имеет дело с точными высказываниями, вроде следующих:

…точки A, B и C лежат на одной прямой…,

…высоты треугольника пересекаются в одной точке…,

…сумма углов треугольника равна 180 градусов…,

но двумя основными (на первых порах) орудиями исследования в младших классах служат два неравенства.

Неравенство № 1. Для любых трёх точек A, B и C на плоскости выполнено соотношение $AB + BC \geqslant AC$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC.

Неравенство № 2. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Это означает, что если в треугольнике ABC выполнено соотношение $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$ и наоборот.

Неравенство № 1 — это хорошо нам знакомое «неравенство треугольника» (см. главу «Неравенство треугольника» в первой части этой книги). Да и неравенство № 2 должно быть всем известно по школьной программе. Здесь мы предлагаем несколько задач на применение этих неравенств.

Задача 1. Докажите, что если $b + c > a$, $a + c > b$, $a + b > c$, где a, b и c — положительные числа, то существует треугольник со сторонами a, b и c.

Задача 2. Докажите, что медиана AM в треугольнике ABC по длине больше, чем $\dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

Задача 3. Докажите, что из отрезков длины a, b и c можно составить треугольник тогда и только тогда, когда есть такие положительные числа x, y, z, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$.

Задача 4. Докажите, что звезду (рис. 106) нельзя нарисовать так, чтобы выполнялись условия $BC > AB$, $DE > CD$, $FG > EF$, $HI > GH$, $KA > IK$.

Задача 5. В треугольнике ABC длина медианы AM больше половины длины BC. Докажите, что угол BAC острый.

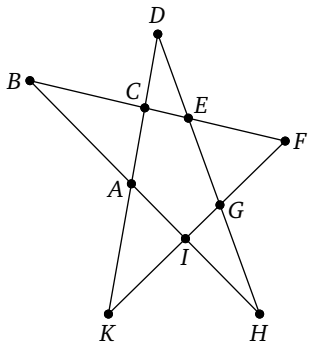


Рис. 106

Для преподавателей. Задачи 1–5 представляют собой, по сути дела, очень простые упражнения — их решение вряд ли вызовет большие затруднения у школьников, особенно в том случае, если соответствующие темы уже пройдены ими в школе. Тщательно разберите решения, выслушайте самих ребят и предложите следующую серию задач.

Задача 6. Докажите, что если из отрезков длины a, b и c можно составить треугольник, то его можно составить и из отрезков длины $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

Задача 7. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, причём $AB + BD < AC + CD$. Докажите, что $AB < AC$.

Задача 8. Центры трёх непересекающихся кругов расположены на одной прямой. Докажите, что если окружность касается всех кругов, то её радиус больше радиуса одного из них.

Задача 9. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — два выпуклых четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если $\angle A > \angle A_1$, то $\angle B < \angle B_1$, $\angle C > \angle C_1$, $\angle D < \angle D_1$.

Задача 10. Докажите, что медиана треугольника, заключённая между двумя его неравными сторонами, образует больший угол с меньшей из двух этих сторон.

Задача 11. Дано 30 отрезков с длинами Φ_2, Φ_2, Φ_3, Φ_3, …, Φ_{16}, Φ_{16} (здесь Φ_k — это числа Фибоначчи, определяемые по формулам $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 1$, и $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}$ при $n > 1$). Сколько различных треугольников можно составить, используя какие-то три из этих отрезков?

Методические замечания. Задачи этой серии несколько сложнее, чем задачи 1–5, но и они не являются чрезмерно трудными. Ещё несколько задач на неравенство треугольника приведено в главе «Неравенство треугольника». См. также книги [59, 86].

Для преподавателей. Не следует посвящать этой теме отдельное занятие, но полезно на протяжении нескольких занятий давать ученикам по две-три задачи на применение этих неравенств. Цель этого — добиться того, чтобы эти неравенства вошли в сознание ребят не как отдельные приёмы решения задач, а как нечто основное, чем надо пользоваться практически на подсознательном уровне, автоматически.

Разберём теперь решение задачи 8. Она замечательна тем, что её можно решить как применением неравенства № 1, так и применением неравенства № 2.

Решение № 1. Можно считать, что все касания внешние (рис. 107), иначе утверждение задачи очевидно. Обозначим радиусы окружностей с центрами A, B, C и D соответственно через r_1, r_2, r_3 и R. По неравенству треугольника $AD + DC > AC$, т. е.

$$R + r_1 + R + r_3 > AC > r_1 + r_3 + 2r_2,$$

и, значит, $R > r_2$, что и требовалось доказать.

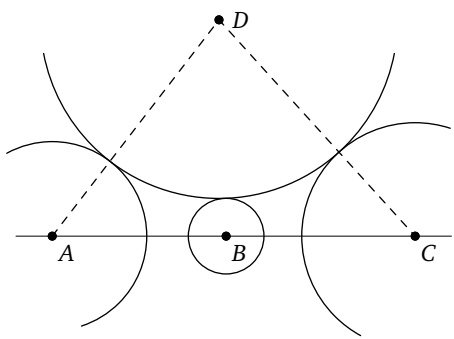


Рис. 107

Решение № 2. Один из углов DBA и DBC не является острым, и, значит, он наибольший в соответствующем треугольнике. Пусть это угол DBA. Тогда по неравенству № 2 имеем $DA > AB$, т. е.

$$R + r_1 > AB > r_1 + r_2,$$

и, значит, $R > r_2$, что и требовалось доказать.

* * *

В завершение этого параграфа приведём несколько более сложных задач, для решения которых необходима некоторая дополнительная идея, дающая вместе с неравенствами № 1 и № 2 ключ к доказательству.

Задача 12. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине B, равным 20°. Докажите, что а) $AB < 3AC$; б) $AB > 2AC$.

Задача 13. Периметр пятиконечной звезды с вершинами в вершинах выпуклого пятиугольника Ф, периметр самого пятиугольника Ф и периметр внутреннего пятиугольника звезды — простые числа. Докажите, что их сумма не меньше 20.

Примечание. Не удивляйтесь, эта задача — по геометрии.

Задача 14. На каждой стороне квадрата отмечено по точке. Докажите, что периметр образованного ими четырёхугольника не меньше удвоенной длины диагонали квадрата.

§ 2. Движения плоскости и равенство фигур

Богатство и примечательность этой темы заключаются в том, что она тесно соприкасается с «серьёзной» математикой. Кристаллографические группы, алгебраические свойства группы движений плоскости, Эрлангенская программа Клейна, геометрия Лобачевского — если преподаватель знаком с этими замечательными разделами геометрии, то он может исподволь подвести своих учеников к пониманию роли симметрии в математике и к понятию группы.

Для преподавателей. 1. Прежде всего нужно добиться того, чтобы ребята овладели азами «теории» — признаками равенства треугольников. Решению стандартных упражнений на эту тему (отсылаем вас к школьным учебникам) можно посвятить значительную часть занятия.

2. Далее необходимо начать изучение понятия движения плоскости. Пусть ребята сами дадут определение движения плоскости и перечислят те движения, которые им уже известны.

Вот набор задач, утверждения которых должны быть достаточно твёрдо усвоены школьниками.

Задача 15. Докажите, что любые два треугольника со сторонами a, b и c каждый могут быть совмещены движением плоскости.

Задача 16. а) Докажите, что если движение T оставляет вершины треугольника ABC на месте, то T есть тождественное преобразование.

б) Докажите, что если оба движения T и T' переводят вершины треугольника ABC в точки A', B', C' соответственно, то T и T' совпадают.

Задача 17. а) Каким движением является композиция двух параллельных переносов?

б)* Докажите, что любой параллельный перенос можно представить как композицию двух осевых симметрий.

в)* Рассмотрим следующее движение: композицию осевой симметрии относительно прямой m и параллельного переноса на единичное расстояние параллельно прямой m. Докажите, что это движение не является ни поворотом, ни параллельным переносом, ни осевой симметрией.

Для преподавателей. Решение этой задачи (желательно, конечно, оно было геометрическим) надо тщательно разобрать, чтобы ребята усвоили понятие композиции. Задача 17 скорее подходит для домашнего задания, чем для решения на самом занятии.

Задача 18. Даны две равные окружности. Можно ли отобразить одну на другую поворотом?

Задача 19. Может ли поворот переводить полуплоскость в саму себя? А какая-либо симметрия?

Задача 20. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что она самосовмещается при повороте на 48° вокруг точки O. Верно ли, что она самосовмещается при повороте на 72° вокруг точки O?

Для преподавателей. 1. После усвоения ребятами понятий движения и композиции движений (а этому надо уделить особое внимание) вам представляется замечательная возможность поговорить с ними об общих понятиях отображения и композиции, иллюстрируя их геометрическими примерами.

2. В некоторый момент занятия полезно выяснить у ребят, умеют ли они «строить» движения плоскости — т. е. могут ли они, например, построить образ данной окружности при осевой симметрии и т. п.

Следующая тема внутри нашего параграфа — применение движений плоскости для решения геометрических задач — заслуживает отдельной и довольно увесистой книжки. Однако мы попытаемся дать здесь хотя бы некоторое представление о ней.

Задача 21. Через точку внутри треугольника проведите отрезок с концами на контуре треугольника так, чтобы эта точка делила отрезок пополам.

Задача 22. Дан угол, вершина которого не поместилась на чертеже. Постройте угол, величина которого в два раза больше величины данного угла.

Задача 23. В данную окружность впишите пятиугольник, стороны которого параллельны пяти данным прямым.

Задача 24. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точки M и N — середины оснований и прямая MN образует равные углы с прямыми AB и CD. Докажите, что эта трапеция равнобедренная.

Задача 25. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ взяты точки P, Q, R и S так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA$. Докажите, что $PQRS$ — квадрат.

Задача 26. На плоскости дана точка P и две параллельные прямые. Постройте равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с P, а две другие лежат на этих прямых соответственно.

Задача 27. Найдите на данной прямой такую точку M, что а) сумма расстояний от M до двух данных точек минимальна; б) разность расстояний от M до двух данных точек максимальна.

Ещё раз упомянем о том, что исчерпать эту красивейшую геометрическую тему практически невозможно, и отошлём любознательного читателя к книгам [59, 86, 89, 92], в которых он найдёт десятки замечательных и довольно трудных задач на применение движений плоскости. Вот ещё несколько задач, в которых исследуются свойства движений плоскости и симметрии фигур.

Задача 28. Какие буквы русского алфавита имеют а) ось симметрии; б) центр симметрии?

Задача 29. Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось.

Задача 30. Существует ли пятиугольник, имеющий ровно две оси симметрии?

Задача 31. Найдите множество M всех точек X на плоскости, удовлетворяющих следующему условию: при данном повороте точка X переходит в такую точку X', что прямая XX' проходит через данную точку S.

* * *

Разберём теперь решение довольно трудной задачи 23.

Вместо данных нам пяти прямых $L_1, L_2, \ldots, L_5$ рассмотрим прямые $K_1, K_2, \ldots, K_5$, перпендикулярные к ним и проходящие через центр нашей окружности. Тогда, как нетрудно понять, прямые L_i и AB (A и B — точки на окружности) параллельны тогда и только тогда, когда A и B симметричны относительно прямой K_i. Осталось лишь найти точку M на окружности, которая после применения к ней всех пяти симметрий — относительно $K_1, K_2, \ldots, K_5$ — останется на месте. Но композиция пяти осевых симметрий — это осевая симметрия, причём её ось также проходит через центр нашей окружности (подумайте, почему это утверждение верно). Следовательно, такая точка M есть и легко строится (как одна из точек пересечения оси симметрии и окружности).

Вопрос. В изложенном решении опущен один «тонкий» момент. Найдите его и восполните пробел.

§ 3. Подсчёт углов

Как известно, «углы счёт любят». Эта поговорка поможет вам запомнить метод, которому посвящён этот параграф.

Что же нужно знать, чтобы уметь считать углы? Всего, конечно, не перечислить, но главные факты указать совсем не трудно:

(1) сумма углов треугольника равна 180°;

(2) вертикальные углы равны;

(3) смежные углы дополняют друг друга до 180°;

(4) вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу и, как следствие:

(5) вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны;

(6) движения плоскости не меняют величин углов.

* * *

Задача 32. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A, равным 36°, проведена биссектриса BK. Докажите, что $BK=BC$.

Решение. Так как $\angle C = 72^\circ$ и $\angle B = 72^\circ$, величина угла KBC равна 36°, и, значит, величина угла CKB равна 72°. Следовательно, треугольник KBC равнобедренный и $BK = BC$.

Задача 33. Докажите, что сумма углов в вершинах пятиугольной звезды (рис. 108) равна 180°.

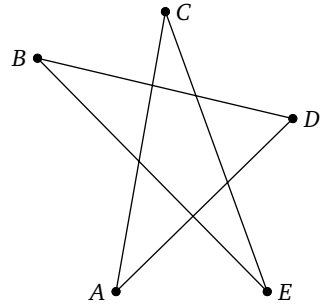


Рис. 108

Решение. Обозначим через F пересечение CE и AD. Получаем

$$180^\circ = \angle EBD + \angle BED + \angle BDE = \\ = \angle E + \angle B + \angle D + \angle FED + \angle FDE.$$

Но

$$\angle FED + \angle FDE = 180^\circ - \angle EFD = \\ = 180^\circ - \angle CFA = \angle A + \angle C.$$

Значит, $180^\circ = \angle E + \angle B + \angle D + \angle A + \angle C$, что и требовалось доказать.

Задача 34. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть перпендикулярными?

Итак, мы видим, что применение метода в простых задачах заключается в следующем: обозначаем какие-нибудь узлы через α, β, γ, δ, … (традиционно использование именно греческого алфавита) и выражаем все углы через них, а потом, используя утверждения (1)–(6), получаем требуемое.

Методические замечания. Здесь перед нами встаёт довольно тонкая альтернатива. С одной стороны, введение малого количества углов может привести к невозможности достаточно легко вывести через них остальные параметры задачи. С другой стороны, введение слишком большого количества углов загромождает чертёж и, плюс к тому, может привести к серьёзным затруднениям из-за того, что мы не используем возможные соотношения между этими углами.

Для преподавателей. Обычно выбор самих исходных углов (и их количества) составляет одну из важнейших частей решения. Научиться правильно вводить исходные величины (здесь это углы) — это один из определяющих моментов математической культуры на «олимпиадном» уровне. Здесь вашим ученикам поможет либо опыт, либо достаточно развитое методологическое мышление.

Вот ещё пять задач (см. также [86, 91], учебники).

Задача 35. Хорды AB и CD окружности параллельны. Докажите, что $AC = BD$.

Задача 36. Три угла вписанного четырёхугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите эти углы.

Задача 37. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 90^\circ$. Проведены медиана AM, биссектриса AK и высота AH. Докажите, что $\angle MAK = \angle KAH$.

Задача 38. Пусть $ABCD$ — квадрат, в котором O — точка пересечения окружности с центром A и радиусом AB и серединного перпендикуляра к BC, более близкая к C. Найдите величину угла AOC.

Задача 39. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка C диаметрально противоположна к A на первой окружности, D — на второй. Докажите, что точки B, C и D лежат на одной прямой.

Разберём решение задачи 37 — оно достаточно стандартно.

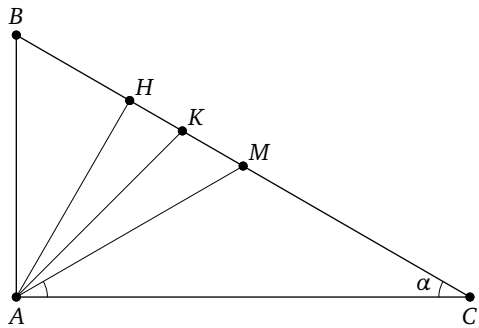


Рис. 109

Обозначим угол BCA через α (рис. 109). Тогда, так как $AM = MC$, получаем, что $\angle MAC = \alpha$, и, значит, $\angle MAK = 45^\circ - \alpha$ (надо, как теперь видно, взять тот из углов треугольника, который меньше 45°). Далее, $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, и, значит, $\angle BAH = \alpha$. Следовательно,

$$\angle KAH = 45^\circ - \alpha = \angle MAK,$$

что и требовалось доказать.

Для преподавателей. 1. Существует масса более сложных задач на подсчёт углов. В сущности, большинство задач по геометрии (школьной) включает в себя подсчёт углов — поэтому надо и здесь добиваться от ребят практически автоматического выписывания углов на чертеже (ни в коем случае не загромождая его).

2. Видимо, не стоит посвящать теме «подсчёт углов» отдельное занятие. Вполне хватит нескольких серий задач на разных занятиях и «внедрения» этой идеи в голову ваших учеников.

§ 4. Площадь

Эта тема совершенно необъятна (как и многие другие геометрические темы), и поэтому здесь мы сосредоточимся в основном на методологии. Каковы основные принципы в решении задач на площадь?

Назовём лишь самое основное, о чём полезно знать и помнить.

1. Основные свойства площади: площадь не меняется при движении фигуры; если фигура составлена из двух непересекающихся фигур, то её площадь равна сумме их площадей.
2. Главные вычислительные формулы: $S = \frac{ah}{2}$ (S — площадь треугольника, a — сторона треугольника, h — высота, опущенная на эту сторону); $S = pr$ (p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной окружности) и т. п.
3. Основные неравенства типа $S \leqslant \frac{ab}{2}$ (a, b — две стороны треугольника) (см., например, задачу 40).
4. Если в формулировке задачи участвуют выражения вида ab или $a^2 + b^2$ (т. е. выражения степени 2), то вполне возможно, что в решении задачи участвует площадь.
5. Если в задаче используются различные выражения, которые естественным образом связываются друг с другом через какую-то формулу площади, то напишите эту формулу (хуже от этого не будет).

Для преподавателей. Пункты 1–3 дают вам большую программу для проверки знаний ваших подопечных по этой теме.

Мы не советуем вам устраивать отдельные занятия по теме «Площадь» (особенно если она уже проходилась в школе). Эта тема опять-таки относится к числу тех, усвоение основных понятий которых должно произойти на очень высоком уровне. Это, конечно, не может стать результатом нескольких занятий, и если по истечении года занятий вы добьётесь желаемых результатов, то можете смело двигаться в более глубокие дебри этой темы (например, аксиоматика площади).

Задача 40. Длины сторон выпуклого четырёхугольника равны a, b, c и d (перечислены по часовой стрелке). Докажите, что площадь четырёхугольника не превосходит а) $\frac{ab+cd}{2}$; б) $\frac{(a+b)(c+d)}{4}$.

Задача 41. Могут ли длины высот треугольника относиться друг к другу как 1 : 2 : 3?

Задача 42. Треугольник площади 1 имеет стороны с длинами a, b и c, причём $a \geqslant b \geqslant c$. Докажите, что $b \geqslant \sqrt{2}$.

Задача 43. Могут ли длины всех сторон треугольника площади 1 быть больше 1000?

Решение задачи 41. Пусть S — площадь этого треугольника, a, b и c — длины его сторон. Тогда длины высот равны $2S/a$, $2S/b$ и $2S/c$. Значит, $a : b : c = 1 : 1/2 : 1/3$, что, как нетрудно видеть, противоречит неравенству треугольника.

Как же мы догадались до идеи ввести площадь и стороны треугольника? Прочитайте ещё раз пункт 5, и вам, наверное, это станет ясно.

Четыре предыдущие задачи — вполне достойные представители подтемы «площадь и неравенства».

А вот несколько задач из области «точного» вычисления — здесь и далее мы будем обозначать площадь фигуры F через $S(F)$.

Задача 44. Точки K, L, M и N — середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $2S(KLMN) = S(ABCD)$.

Задача 45. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если прямая AC перпендикулярна прямой BD и $AC = 3$, $BD = 8$.

Задача 46. Дан треугольник ABC. Точка A_1 лежит на продолжении стороны BC за точку C, причём $BC = CA_1$. Аналогично строятся точки B_1 и C_1 (рис. 110). Найдите $S(A_1B_1C_1)$, если $S(ABC) = 1$.

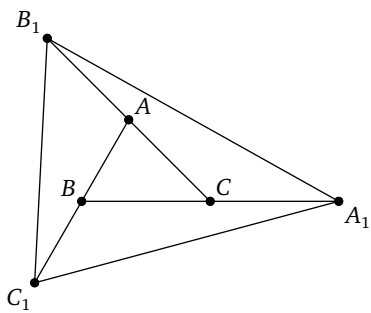


Рис. 110

Задача 47. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что площади треугольников ABM и BCM равны тогда и только тогда, когда M лежит на медиане BK.

И наконец серия задач на доказательство.

Задача 48. Докажите, что если два выпуклых четырёхугольника расположены так, что середины сторон у них совпадают, то их площади равны.

Задача 49. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и COD равновелики.

Задача 50. Докажите, что сумма расстояний от точки, находящейся внутри правильного треугольника, до его сторон не зависит от положения точки.

Для преподавателей. Как можно видеть, например, из решения задач 44–47, в задачах на площадь часто применяются и «шаблонные» геометрические идеи: равные треугольники, подобие, теорема Фалеса. Это естественно, так как тема «площадь» органично вписывается в общую геометрическую картину. На примерах такого рода можно объяснить школьникам, что решение задачи обычно объединяет в себе несколько соображений — очень редко задача решается «в один ход». Это общий принцип решения задач, как на олимпиадах, так и в сфере «высшей» математики.

§ 5. Разные задачи

Данный параграф состоит из трёх циклов задач по темам, которых мы пока не касались. Эти задачи предназначены в основном для самостоятельного решения, и их можно рассматривать просто как упражнения, которые должны сопровождать развёрнутое изучение указанных тем (см. также литературу по теме «Геометрия»).

Цикл 1. Построения

Задача 51. Постройте треугольник

а) по основанию, длине опущенной на него высоты и углу при основании;

б) по трём серединам его сторон;

в) по длинам двух сторон и медианы между ними;

г) по двум прямым, являющимся биссектрисами углов треугольника, и его третьей вершине.

Задача 52*. Разделите отрезок пополам

а) при помощи одного циркуля;

б) при помощи двусторонней линейки, ширина которой меньше длины отрезка;

в) при помощи двусторонней линейки, ширина которой больше длины отрезка.

Задача 53. На плоскости дан отрезок AB. На нём выбирается произвольная точка M, и на отрезках AM и MB как на гипотенузах строятся равнобедренные прямоугольные треугольники AMC и BMD, причём вершины C и D находятся по одну сторону от отрезка AB. Постройте множество середин всех отрезков CD.

Задача 54. Имеется инструмент для геометрических построений, при помощи которого можно а) провести прямую через две данные точки; б) восстановить перпендикуляр к данной прямой в точке, лежащей на этой прямой.

Как при помощи этого инструмента опустить перпендикуляр из точки на прямую?

Задача 55. Внутри окружности дана точка X. Постройте хорду окружности, проходящую через X и делящуюся этой точкой на два отрезка, разность длин которых равна данному числу d.

Цикл 2. Вычисления

Задача 56. Найдите ошибку в доказательстве того, что катет равен гипотенузе (рис. 111). Рассмотрим треугольник ABC с прямым углом B. Пусть M — точка пересечения биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к отрезку AB; K, L и N — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны треугольника. Тогда $LM = MN$, $AM = MB$, и поэтому треугольники ALM и MNB равны по катету и гипотенузе. Значит, $AL = NB$. Поэтому

$$AC = AL + LC = NB + CN = BC.$$

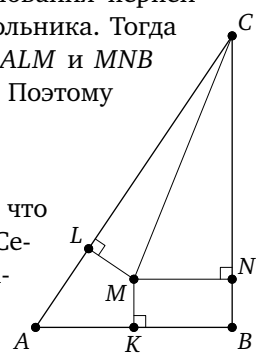


Рис. 111

Задача 57. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $BC = AD$, M — середина AD, N — середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

Задача 58. Дан прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Докажите, что длина отрезка серединного перпендикуляра к гипотенузе, заключённого внутри треугольника, равна трети длины большего катета треугольника.

Задача 59. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, и медианы AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что периметр треугольника ABC равен длине ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$.

Цикл 3. Подобие

Задача 60. Из точки C на окружности опущен перпендикуляр CD на диаметр окружности AB. Докажите, что $CD^2 = AD \cdot BD$.

Задача 61. Одна из диагоналей вписанного четырёхугольника — диаметр. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

Задача 62. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Докажите, что $CD : DB = CA : AB$.

Задача 63. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC; O– середина HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

§ 6. Послесловие

1. Тема «геометрические неравенства», начатая в § 1, может быть развита чрезвычайно далеко — существует очень много красивейших примеров: начиная с простого неравенства треугольника и его следствий и кончая такими жемчужинами геометрии, как изопериметрическое неравенство (см. [59, главы 15, 16]).

2. Тема «подсчёт углов» — лишь одна из весьма представительного класса «вычислительных» тем, которым также необходимо уделить соответствующее внимание.

3. В отличие от предыдущих тем, тема «площадь» в нашей главе начинается сразу с достаточно содержательных задач, а не просто с упражнений. Их можно найти в школьных учебниках (хотя таких упражнений довольно мало).

4 (для преподавателей). Постарайтесь, чтобы ребята усвоили следующее: если задача не поддаётся лихому кавалерийскому наскоку (часто с негодными средствами), то её, возможно, удастся одолеть тщательной осадой (которая не обязательно должна занимать много времени). Осада, конечно, ведётся по всем правилам: комбинирование приёмов, перебор возможных подходов, применение вычислительных методов, постепенное накопление фактов.

5 (для преподавателей). Многие красивые темы планиметрии, доступные школьникам 6–8 классов, не затронуты в этой главе: вписанные и описанные многоугольники, замечательные точки в треугольнике, численные соотношения и т. д. Безусловно, они заслуживают изучения, однако их включение в эту главу превратило бы её в одно-

образный и всё равно очень неполный справочник. Мы же постарались затронуть основные аспекты этой своеобразной науки-игры. Несмотря на огромное разнообразие всего этого пёстрого материала, нужно донести до школьников идею его единства — как в тематическом, так и в методологическом плане.

6. Краткий путеводитель.

а) Огромный задачный материал по «обычной» геометрии собран в книгах [51, 59, 61, 85, 86, 91] и др., хотя некоторые из них быстро переходят на высоты, обычно недоступные школьникам 6–8 классов.

б) Книги [88, 92] можно порекомендовать тем, кто склонен видеть в математике скорее алгебру, чем геометрию. Там же собран отличный задачный материал по преобразованиям плоскости.

в) Мы также всячески рекомендуем — и преподавателям, и школьникам — прекрасно написанные книги [89, 90]. Обязательно надо прочитать и геометрические (а впрочем, и другие тоже) главы книг Гарднера [5–7].

Глава 15

Системы счисления

§ 1. Что это такое?

Каждый школьник, увидев запись «2653», понимает, что речь идёт о числе «две тысячи шестьсот пятьдесят три». Задумаемся, откуда он узнает это. Дело в том, что все привыкли к следующему способу записи чисел (способы записи чисел и называют *системами счисления*): последняя цифра числа обозначает количество единиц в нём, предпоследняя — количество десятков, третья с конца цифра — количество сотен и т. д. Таким образом, записывая «2653», мы подразумеваем число $2 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$, или, в более компактной форме, $2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Видно, что особая роль в нашем способе отводится числу десять: все числа представляются в виде суммы различных степеней десятки с коэффициентами, принимающими значения от 0 до 9. Поэтому эта система счисления и называется десятичной. При записи в этой системе используются десять символов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, называемых цифрами. Они обозначают числа от нуля до девяти. Следующее число, т. е. десять, принимается за единицу следующего разряда и записывается так: 10.

А что будет, если вместо десяти использовать какое-нибудь другое число, например шесть? По аналогии нам потребуется шесть цифр-символов. В качестве них мы можем взять знакомые нам символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, которые будут обозначать числа от нуля до пяти. Число шесть мы примем за единицу следующего разряда, и поэтому в нашей новой системе счисления оно будет записываться так: 10. Продолжая аналогию, мы можем представить любое натуральное число в виде суммы различных степеней шестёрки с коэффициентами от нуля до пяти. Например (запись всех чисел десятичная),

$$7 = 1 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0, \quad 12 = 2 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^0,$$
$$35 = 5 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0, \quad 45 = 1 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0.$$

Поэтому в нашей новой системе счисления, которая называется шестеричной, естественно записывать число 7 как «11», число 12 как «20», 35 как «55», а 45 как «113».

Нетрудно понять, что в шестеричной системе счисления можно записать любое натуральное число. Покажем, как это сделать для числа 450 (и в этом примере, как и ранее, запись всех чисел десятичная). Наибольшее число, являющееся степенью шестёрки и не превосходящее 450, — это 216. Разделим 450 на 216 с остатком. Неполное частное от этого деления равно двойке. Поэтому первой цифрой шестеричной записи числа 450 будет 2. Остаток от деления равен 18. Разделим его на предыдущую степень шестёрки (на первом этапе мы делили на 6^3, а теперь — на 6^2) с остатком. Неполное частное равно нулю, поэтому вторая цифра — 0. Остаток равен 18. Разделив с остатком 18 на 6^1, найдём, что третья цифра равна 3, а остаток — 0. Таким образом, последняя цифра равна 0. Итак, шестеричная запись числа 450 такова: «2030».

При построении новой системы счисления мы не пользовались никакими специфическими свойствами числа шесть. Аналогично по любому натуральному числу n, большему 1, можно построить n-ичную систему счисления, в которой запись числа связана с его разложением по степеням числа n. Число n называется *основанием* этой системы счисления. В случае, когда могут возникнуть недоразумения, мы будем приписывать справа — внизу от числа — основание системы счисления, в которой оно записано. Таким образом, как было установлено выше, выполняются равенства $7_{10} = 11_6$, $12_{10} = 20_6$, $35_{10} = 55_6$, $45_{10} = 113_6$.

Упражнение 1. Сколько цифр-символов необходимо иметь
а) в двоичной системе счисления;
б) в n-ичной системе счисления?

Для того чтобы записать данное натуральное число в n-ичной системе счисления, нужно представить его в виде

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0,$$

где все a_i принимают значения от нуля до $n - 1$, а a_k, кроме того, не равно нулю.

Упражнение 2. Запишите в десятичной системе счисления числа 10101_2, 10101_3, 211_4, 126_7, 158_{11}.

Упражнение 3. Запишите число 100_{10} в двоичной, троичной, четверичной, пятеричной, шестеричной, семеричной, восьмеричной и девятеричной системах счисления.

Упражнение 4. Запишите число 111_{10} в одиннадцатеричной системе счисления (в качестве недостающей цифры «10» принято использовать букву *A*).

Научимся теперь складывать и умножать числа, записанные в произвольной системе счисления. Это делается так же, как и в десятичной системе («в столбик»). Однако нужно помнить, что перенос в следующий разряд происходит тогда, когда результат превышает основание данной системы счисления (или равен ему).

Для успешного выполнения этих операций нужно (так же как и в десятичной системе счисления) знать таблицы сложения и умножения для чисел, меньших основания системы счисления, т. е. записываемых одной цифрой.

Упражнение 5. Составьте таблицы сложения и умножения для двоичной, троичной, четверичной и пятеричной систем счисления.

Упражнение 6. Вычислите а) $1100_2 + 1101_2$; б) $201_3 \cdot 102_3$.

Для преподавателей. Мы очень коротко объяснили, как нужно складывать и умножать числа в произвольной системе счисления. На занятии это должно, конечно, занять немного больше времени. При этом нужно обсудить большое количество примеров — только они позволяют приобрести необходимые навыки в технике.

Опишем теперь эффективный алгоритм перевода записи числа из одной системы счисления в другую. Он отличается от уже известного нам тем, что запись числа в новой системе возникает не «слева направо», а «справа налево». Последняя цифра является остатком от деления исходного числа на основание новой системы счисления. Затем очередная цифра находится так: неполное частное предыдущего деления вновь делится на основание системы счисления, и берётся остаток.

Пример. Запишем число 250_{10} в восьмеричной системе счисления:

$$250 = 31 \cdot 8 + 2, \quad 31 = 3 \cdot 8 + 7, \quad 3 = 0 \cdot 8 + 3.$$

Таким образом, $250_{10} = 372_8$.

Упражнение 7. Запишите в семеричной системе счисления числа а) 1000_{10}; б) 532_8.

В заключение параграфа приведём несколько более интересных задач, связанных с системами счисления.

Задача 1. В какой системе счисления справедливо равенство $3 \cdot 4 = 10$?

Задача 2. Существует ли система счисления, в которой одновременно
а) $3+4=10$ и $3\cdot 4=15$;
б) $2+3=5$ и $2\cdot 3=11$?

Задача 3. Сформулируйте (и докажите) условие, позволяющее определить чётность числа по его записи
а) в троичной системе счисления;
б) в системе счисления с основанием n.

Задача 4. На доске сохранилась полустёртая запись

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 3 & & 5 & \\ + & 1 & & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

Выясните, в какой системе счисления записан пример, и восстановите слагаемые.

Задача 5. Один школьный учитель заявил, что у него в классе 100 детей, из них 24 мальчика и 32 девочки. Какой системой счисления он пользовался?

Для преподавателей. Материал этого параграфа естественно обсуждать на двух-трёх последовательных занятиях. На них школьники должны осознать:
— понятие системы счисления;
— технику перевода из одной системы счисления в другую;
— арифметику в произвольной системе счисления.

Для того чтобы сделать освоение этого технического материала менее скучным, можно воспользоваться задачами 1–5 и аналогичными им.

§ 2. Признаки делимости

В предыдущем параграфе мы научились складывать и умножать числа, записанные в произвольной системе. Что касается обратных операций — вычитания и деления, — они также производятся по схемам, аналогичным тем, которые известны вам по десятичной системе счисления («в столбик» и «уголком»). Однако, как вы знаете, деление «уголком» даже в привычной десятичной системе счисления — достаточно трудоёмкий процесс. Поэтому часто бывает удобно воспользоваться признаком делимости для того, чтобы выяснить, делится ли одно число на другое, не производя деления (для десятичной системы счисления признаки делимости подробно обсуждаются

в главе «Делимость–2»). В недесятичных системах счисления деление «уголком» ещё более трудоёмко — дело усугубляется непривычностью ситуации (попробуйте, например, выяснить, делится ли число 123456654321_7 на 6). В связи с этим естественно попытаться найти аналоги известных признаков делимости для произвольных систем счисления.

Начнём с самого простого. Почему мы уверены, что число, оканчивающееся нулём в десятичной системе счисления, делится на 10? Дело в том, что в разложении

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

этого числа, соответствующем его десятичной записи, последняя цифра a_0 равна 0, и поэтому каждое из слагаемых делится на 10. Столь же очевидно и обратное утверждение: число, делящееся на 10, должно оканчиваться нулём.

Рассмотрим теперь произвольную систему счисления. Аналогичные рассуждения позволяют доказать следующий признак делимости (на основание системы счисления).

В n-ичной системе счисления запись числа заканчивается нулём тогда и только тогда, когда это число делится на n.

Задача 6. Сформулируйте и докажите признак делимости на

а) степень основания системы счисления (аналогичный признакам делимости на 100, 1000, …);

б) делитель основания системы счисления (аналогичный признакам делимости на 2 и на 5).

Методические замечания. Хотелось бы ещё раз подчеркнуть, что различные системы счисления — лишь разные способы записи чисел. Поэтому делимость одного числа на другое не зависит от системы счисления, в которой они записаны.

В то же время в каждой системе счисления существуют приёмы для определения делимости на некоторые фиксированные числа. Это и есть признаки делимости.

Перейдём теперь к более содержательным признакам делимости. По-видимому, самым известным из них является признак делимости на 9. Попробуем его обобщить. Выясним, какое соображение оказалось решающим при доказательстве этого признака делимости в десятичной системе счисления (см. главу «Делимость–2»). Дело было в том, что $9 = 10 - 1$ и поэтому $10 \equiv 1 \pmod 9$.

Это наводит нас на мысль аналогичным образом сформулировать и доказать признак делимости на $n-1$ в n-ичной системе счисления. Действительно, $n \equiv 1 \pmod{n-1}$. Отсюда следует, что $n^s \equiv 1 \pmod{n-1}$ для любого натурального s. Поэтому

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0 \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod{n-1}.$$

Таким образом, сумма цифр числа, записанного в n-ичной системе счисления, делится на $n-1$ тогда и только тогда, когда само число делится на $n-1$.

Напомним теперь вопрос, заданный в начале параграфа: делится ли число 123456654321_7 на 6? Надеемся, что теперь вы легко сможете на него ответить.

Задача 7. Сформулируйте и докажите признак делимости на

а) делитель числа «основание системы счисления $-$ 1» (аналогичный признаку делимости на 3);

б) «основание + 1» (аналогичный признаку делимости на 11);

в) делитель числа «основание + 1» (аналога нет!).

Для преподавателей. Теме этого параграфа, видимо, нужно посвятить одно занятие. Было бы хорошо, если бы на нём школьники, используя подсказки преподавателя, сами формулировали и доказывали новые признаки делимости.

§ 3. Примеры применения

До этого параграфа системы счисления интересовали нас сами по себе. Теперь мы разберём несколько задач, внешне не имеющих к нашей теме никакого отношения. Однако недесятичные системы счисления естественно возникают при решении этих задач.

Задача 8. Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое число граммов от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть только на одну чашку весов?

Решение. Любое число можно записать в двоичной системе счисления. Поэтому для взвешивания любого числа граммов от 1 до 100 достаточно иметь семь гирь с весами: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Шестью гирями обойтись нельзя, так как с их помощью можно взвесить не более $2^6 - 1 = 63$ различных весов (каждая гиря либо участвует, либо не участвует во взвешивании).

Задача 9*. Тот же вопрос, если гири разрешается класть на обе чашки весов.

Решение. При решении этой задачи нам понадобится следующее интересное свойство троичной системы счисления:

любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел, запись которых в троичной системе счисления содержит только 0 *и* 1.

Для доказательства нужно записать исходное число в троичной системе счисления и построить требуемые числа поразрядно справа налево. При этом если у получившихся чисел в каких-то одноимённых разрядах стоят единицы, то их можно заменить нулями.

Теперь понятно, что достаточно иметь 5 гирь с весами 1, 3, 9, 27, 81 (подумайте, почему не нужна гиря весом 243 грамма).

Четырёх же гирь явно недостаточно, так как с их помощью можно взвесить не более $3^4 - 1 = 80$ различных весов (каждая гиря либо на левой чашке весов, либо на правой, либо не участвует во взвешивании).

Задача 10. Кащей Бессмертный загадывает три двузначных числа: a, b и c. Иван Царевич должен назвать ему три числа X, Y, Z, после чего Кащей сообщит ему сумму $aX + bY + cZ$. Царевич должен отгадать задуманные числа, иначе ему отрубят голову. Как ему спастись?

Решение. Царевич может назвать числа 1, 100, $100^2 = 10000$. Числа a, b, c — «цифры» ответа Кащея в 100-ичной записи.

Задача 11*. Докажите, что из набора $0, 1, 2, \ldots, 3^{k-1}$ можно выбрать 2^k чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других выбранных чисел.

Решение. Воспользуемся троичной системой счисления. Будем считать, что троичная запись каждого из данных чисел состоит ровно из k цифр (при необходимости заполним пустующие старшие разряды нулями). Выберем теперь те числа, троичная запись которых содержит только цифры 0 и 1. Очевидно, что их ровно 2^k. Покажем, что это и есть искомый набор. Предположим противное: среди выбранных чисел есть три различных числа x, y, z, удовлетворяющих равенству $x + y = 2z$. Так как числа x и y различаются хотя бы в одном разряде, в троичной записи их суммы $x + y$ в этом разряде стоит цифра 1. Однако в записи числа $2z$ встречаются только цифры 0 и 2.

Задача 12. Докажите, что 2^k чисел с требуемым свойством можно выбрать и из набора $0, 1, 2, \ldots, \frac{3^k - 1}{2}$.

Для преподавателей. Задачи этого параграфа можно давать по одной на занятии и использовать в различных математических соревнованиях.

§ 4. Игра «Ним»

В этом параграфе речь пойдёт об известной игре «Ним». Правила её таковы. Имеется три кучки камней. Двое играющих по очереди берут камни из этих кучек, причём за один ход можно брать любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто забирает последний камень.

Замечательно, что выигрышная стратегия в этой игре формулируется с использованием двоичной системы счисления. Мы разберём решение этой игры в более общей ситуации: для произвольного числа кучек. Заметим, что в случае двух кучек «Ним» превращается в игру с ладьёй на прямоугольной доске (см. задачи 10, 16, 22 главы «Игры»).

Как обычно (см. § 3 указанной выше главы), для решения игры достаточно указать набор выигрышных позиций. Выпишем двоичные записи количеств камней в кучках друг под другом так, чтобы одноимённые разряды находились в одном столбце (см. ниже). Вычислим теперь чётность числа единиц в каждом разряде.

1	1	0	0	1	0	1		1	1	0	0	1	0	1
		1	1	1	1	0				1	1	1	1	0
	1	0	1	1	1	1			1	0	1	1	1	1
								Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Ч

Наше утверждение состоит в том, что выигрышными являются те и только те позиции, в которых количество единиц в каждом разряде чётно (позиция, изображённая на рисунках, проигрышная).

Для доказательства этого необходимо показать, что

1) завершающая позиция игры выигрышная;
2) любой ход из выигрышной позиции ведёт в проигрышную;
3) из любой проигрышной позиции за один ход можно попасть в какую-нибудь выигрышную.

Пункт 1 очевиден.

Для доказательства пункта 2 достаточно заметить, что после любого хода изменяется число камней в какой-то кучке, а значит, меняется некоторый разряд его двоичной записи и, следовательно, меняется чётность числа единиц в соответствующем столбце.

Покажем теперь, как из произвольной проигрышной позиции перейти к выигрышной. Для этого нужно, взяв несколько камней из одной кучки, изменить чётность числа единиц во всех столбцах с нечётным количеством единиц (и только в них). Рассмотрим крайний левый столбец с нечётным числом единиц и выделим кучку, у которой в этом разряде стоит 1 (здесь мы позволяем себе известную вольность речи). Кстати, почему такая кучка есть? Из этой кучки мы и будем брать камни.

Легко понять, сколько камней должно остаться в ней после хода: двоичную запись исходного числа камней нужно изменить в разрядах, соответствующих столбцам с нечётным числом единиц. Так как в старшем из изменившихся разрядов вместо единицы будет стоять ноль, число камней в выбранной кучке действительно уменьшится.

Задача 13. Разберите следующие две игры.

а) На первой горизонтали шахматной доски стоит восемь белых шашек, на последней — восемь чёрных. За ход каждый из играющих может передвинуть шашку своего цвета вперёд по вертикали на любое количество клеток, но так, чтобы не перепрыгнуть шашку соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б) Та же игра, но шашки разрешается двигать не только вперёд, но и назад.

Для преподавателей. Обсуждать игру «Ним» имеет смысл только в сильном кружке. При этом необходимо дать ребятам возможность поиграть друг с другом и высказать свои гипотезы о выигрышной стратегии. Придумать правильную стратегию очень трудно, однако умелые и вовремя сделанные подсказки могут создать иллюзию самостоятельного решения задачи.

Глава 16

Неравенства

§ 1. Что больше?

Вопрос, вынесенный в название параграфа, по сути, один из самых распространённых детских вопросов.

— А кто сильнее: папа или чемпион мира?

— Что выше: наш дом или Останкинская телебашня?

— Где больше живёт людей: в Риге или в Калуге?

В математике такие «наивные» вопросы, хотя и не имеют глубокого содержания, помогают научиться лучше и точнее вычислять, оперировать с большими числами.

Для преподавателей. Техника вычислений и оценок вообще является очень значимым аспектом математической культуры. Необходимо, чтобы школьник владел различными методами вычислений и оценок, причём не на уровне «слепого» применения. Невозможно помнить все технические фокусы. Но можно и нужно научить ребят всё делать самим, как говорится, «руками». Умение точно проводить вычисления шлифуется именно на задачах с конкретными численными данными, подобных тем, которые рассматриваются в этом параграфе.

Вот типичный вопрос из этой серии.

Задача 1. Какое число больше: 31^{11} или 17^{14}?

Выписать оба этих числа, конечно, можно — в каждом из них не более 20 цифр. Однако этот путь решения вопроса очень трудоёмок и не увенчается успехом в других, более трудных задачах. Попробуем по-другому:

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}.$$

Вот такая цепочка неравенств сразу даёт нам результат: 31^{11} меньше, чем 17^{14}. Единственное, что нам было необходимо для решения, —

это подметить, что числа 31 и 17 находятся «рядом» со степенями двойки.

Задача 2. Что больше: а) 2^{300} или 3^{200}? б) 2^{40} или 3^{28}? в) 5^{44} или 4^{53}?

Задача 3. Докажите, что $2^{100}+3^{100}<4^{100}$.

Решение. Поскольку $2^{100}<3^{100}$, нам достаточно доказать, что $2\cdot 3^{100}<4^{100}$, или что $\left(\frac{4}{3}\right)^{100}>2$. Но даже $\left(\frac{4}{3}\right)^{3}=\frac{64}{27}$ уже больше, чем 2.

Задача 4. Что больше: 7^{92} или 8^{91}?

Исследуя далее пример из задачи 3, попробуем понять, каково же натуральное n, для которого $4^n<2^{100}+3^{100}<4^{n+1}$. В связи с этим возникает следующая задача.

Задача 5*. Докажите, что $4^{79}<2^{100}+3^{100}<4^{80}$.

Решение. Так как $2\cdot 3^{100}>2^{100}+3^{100}$, нам достаточно доказать, что $4^{80}>2\cdot 3^{100}$, или $\left(\frac{4^4}{3^5}\right)^{20}=\left(\frac{256}{243}\right)^{20}>2$.

Так как нам известно неравенство Бернулли $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ при $x\geqslant -1$, $n\geqslant 1$ (см. задачу 56 или главу «Индукция» настоящего сборника), хотелось бы выяснить, правда ли, что $\frac{256}{243}>1+\frac{1}{20}$. Это на самом деле так (проверьте!). Следовательно,

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20}>\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}\geqslant 2.$$

Осталось доказать, что $2^{100}+3^{100}>4^{79}$. Докажем, что $3^{100}>4^{79}$. Для этого нужно доказать, что $\frac{4^{80}}{3^{100}}<4$. Построим следующую цепочку неравенств:

$$\frac{4^{80}}{3^{100}}=\left(\frac{256}{243}\right)^{20}<\left(\frac{19}{18}\right)^{20}=\left(\frac{361}{324}\right)^{10}<\left(\frac{9}{8}\right)^{10}=\left(\frac{81}{64}\right)^{5}<\left(\frac{9}{7}\right)^{5}=\frac{59049}{16807}<4.$$

Комментарий. Метод, как видите, состоит в постепенном упрощении «ужасно сложного» выражения вроде $\frac{4^{80}}{3^{100}}$.

Для преподавателей. Для того чтобы хорошо овладеть этим методом, необходимо, чтобы ученики были «на короткой ноге» с различными небольшими степенями и вообще не пугались конкретных вычислений. Этому могут помочь задачи наподобие следующей.

Задача 6. Найдите все степени чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, лежащие в промежутке от 1 до 10000, и выстройте их по порядку.

Найдите среди них пары различных чисел, разность между которыми не превосходит 10.

Комментарий. Прекрасная задача для домашнего задания.

Решение трёх следующих задач основано совсем на других идеях. Пока что мы доказывали неравенства между конкретными числами, преобразуя их и вычисляя результаты преобразований. Новая идея состоит в том, чтобы для удобства вычислений заменить конкретное число на переменную.

Задача 7. Что больше: $1234567 \cdot 1234569$ или 1234568^2?

Решение. Обозначим число 1234568 через x. Тогда левое выражение превратится в

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2.$$

Таким образом, отпала необходимость перемножать и возводить в квадрат семизначные числа.

Задача 8. Что больше: $\frac{10\ldots01}{10\ldots01}$ или $\frac{10\ldots01}{10\ldots01}$? (в каждой из дробей число в знаменателе имеет на один ноль в записи больше, чем число в числителе; при этом слева в верхнем числе 1984 нуля, а справа — 1985).

Задача 9. Что больше: $\frac{1234567}{7654321}$ или $\frac{1234568}{7654322}$?

Вот ещё несколько задач на оценки различного типа.

Задача 10. Какое число больше: 100^{100} или $50^{50} \cdot 150^{50}$?

Задача 11. Что больше: $(1{,}01)^{1000}$ или 1000?

Задача 12. Докажите, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

Задача 13 (почти шутка). Если к числу 100 применить 99 раз операцию «факториал», то получится число A. Если к числу 99 применить 100 раз операцию «факториал», то получится число B. Какое из этих двух чисел больше?

Разберём решение задачи 12. Разобьём слагаемые на пары:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \frac{1}{100}.$$

Что мы получим в начале этой суммы, состоящей, заметьте, только из положительных чисел? Очевидно, $\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \ldots$ Но уже $\frac{1}{6} + \frac{1}{20} > \frac{1}{5}$, откуда и следует требуемый результат.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 14. Сколько цифр у числа 2^{1000}?

Задача 15. Найдите наибольшее из чисел 5^{100}, 6^{91}, 7^{90}, 8^{85}.

Задача 16*. Рассмотрим число $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$. Докажите, что оно а) меньше $\frac{1}{10}$; б) меньше $\frac{1}{12}$; в) больше $\frac{1}{15}$.

Для преподавателей. Несомненно, задач, подобных задачам 1–10, можно придумать сколько угодно. Приведём пример. Возьмём два небольших числа — 5 и 7. Рассмотрим большую степень пятёрки — пусть это будет 5^{73}. Теперь подберём небольшие степени чисел 5 и 7, отличающиеся «не слишком сильно» (это уже зависит от вашего чувства меры). Пусть это будут числа $5^4 = 625$ и $7^3 = 343$ — показатели должны быть разными! Так как $5^4 > 7^3$, получаем, что $5^{72} > 7^{54}$. Итак, $5^{73} > 5^{72} > 7^{54}$. Теперь ещё можно немножко «подправить» показатель 54 и получится очередное упражнение: доказать, что $5^{73} > 7^{53}$.

Комментарий. Неравенства подобного типа, получающиеся в результате композиции нескольких грубых и более простых неравенств, носят в фольклоре название «неравенств по-ленинградски».

Для преподавателей. Решение подобных числовых неравенств очень способствует развитию вычислительных способностей и техники оценок. Не забывайте, однако, что некоторые из школьников, обладающие хорошими логико-комбинаторными способностями, могут совершенно «не переваривать» подобных технико-вычислительных задач.

§ 2. Главное неравенство

Главным (и, по сути, единственным) неравенством в области вещественных чисел является неравенство $x^2 \geqslant 0$ — его верность сомнений не вызывает. Из него уже следуют другие, очень известные и употребительные неравенства, первым из которых, безусловно, является неравенство Коши, или, как его ещё называют, неравенство о средних:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad \text{для любых } a, b \geqslant 0.$$

Числа $\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$ носят название *среднего арифметического* и *среднего геометрического* чисел a и b.

Доказывается оно очень просто:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует не только верность неравенства Коши, но и то, что в равенство оно обращается лишь при $a = b$.

Задача 17. Докажите, что $1 + x \geqslant 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$.

Задача 18. Докажите, что $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ при $x > 0$.

Задача 19. Докажите, что $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$ при любых x и y.

Задача 20. Докажите, что $2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2$ при любых x и y.

Задача 21. Докажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}$ при $x, y > 0$.

Решение задачи 18. Имеем

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Вообще, решение всех подобных задач сводится либо к подходящему применению неравенства Коши, либо, после удачного преобразования выражения, к использованию неравенства $x^2 \geqslant 0$.

Более сложные неравенства, однако, решаются либо многократным применением неравенства Коши, либо при помощи сочетания нескольких разных идей. Вот типичный пример.

Задача 22. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ при любых x, y, z.

При решении воспользуемся результатом задачи 19 и запишем три неравенства:

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant xy, \quad \frac{1}{2}(x^2+z^2) \geqslant xz, \quad \frac{1}{2}(y^2+z^2) \geqslant yz.$$

Сложив их, мы и получим требуемое неравенство.

Задача 23. Докажите, что $(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$ при $a, b, c \geqslant 0$.

Задача 24. Докажите, что $ab + bc + ca \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$ при $a, b, c \geqslant 0$.

Задача 25. Докажите, что $x^2 + y^2 - xy \geqslant x + y - 1$ при любых x и y.

Задача 26. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

Решение. Воспользуемся неравенством из задачи 22, причём дважды:

$$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=$$
$$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geqslant (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)=$$
$$=abc(a+b+c).$$

Неравенство Коши замечательно двумя своими свойствами. Во-первых, оно позволяет оценивать сумму положительных чисел через их произведение. Во-вторых, оно имеет место не только для двух чисел, но распространяется и на произвольное количество чисел. Вот, например, как выглядит неравенство Коши для четырёх чисел:

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}\quad\text{для любых } a,b,c,d\geqslant 0,$$

где опять-таки левая и правая части неравенства носят названия среднего арифметического и среднего геометрического данных четырёх чисел соответственно.

Доказывается неравенство Коши для четырёх чисел так:

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\Big(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\Big)\geqslant\frac{1}{2}\big(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\big)\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$$

— несколько раз применяется неравенство Коши для двух чисел.

Задача 27. Докажите, что $x^4+y^4+8\geqslant 8xy$ при любых x и y.

Задача 28. Пусть a, b, c, d — положительные числа. Докажите, что

$$(a+b+c+d)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\Big)\geqslant 16.$$

Для трёх чисел неравенство Коши доказывается более сложным способом. Выглядит само неравенство так:

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}\quad\text{для любых } a,b,c\geqslant 0.$$

Чтобы доказать его, рассмотрим четыре числа: a, b, c и $m=\sqrt[3]{abc}$. Тогда

$$\frac{a+b+c+m}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcm}=\sqrt[4]{m^3\cdot m}=m.$$

Следовательно,

$$\frac{a+b+c}{4}\geqslant\frac{3m}{4},$$

и, значит,

$$a+b+c\geqslant 3m,\quad\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$

что и требовалось доказать.

Задача 29. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3.$$

Задача 30. Докажите, что при $x\geqslant 0$ выполнено неравенство

$$3x^3-6x^2+4\geqslant 0.$$

Решение. Докажем, что $3x^3+4\geqslant 6x^2$. Но $3x^3+4=2x^3+x^3+4$. Применяя неравенство Коши, получаем

$$2x^3+x^3+4\geqslant 3\sqrt[3]{2x^3\cdot x^3\cdot 4}=3\cdot 2x^2=6x^2$$

что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 31. Докажите, что при a, b, $c>0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

Задача 32. Докажите, что при a, b, $c>0$ имеет место неравенство

$$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geqslant a+b+c.$$

Задача 33. Докажите, что при a, b, $c\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geqslant\frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Задача 34. Докажите, что при a, b, $c\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc(a+b+c).$$

Задача 35. Сумма трёх положительных чисел равна 6. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

Задача 36. Докажите, что при $x\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$2x+\frac{7}{3}\geqslant 4\sqrt{x}.$$

Задача 37. Сумма двух неотрицательных чисел равна 10. Какое максимальное и какое минимальное значение может принимать сумма их квадратов?

Задача 38*. Докажите неравенство Коши для пяти чисел, т. е. докажите, что при a, b, c, d, $e\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c+d+e}{5}\geqslant\sqrt[5]{abcde}.$$

Указание. Докажите сначала неравенство Коши для восьми чисел, а затем воспользуйтесь той же идеей, что и при доказательстве неравенства Коши для трёх чисел.

§ 3. Тождественные преобразования

Нередко удачно подобранное тождественное преобразование помогает решить задачу или немедленно доказывает неравенство.

Пример. Вспомним неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$$

из задачи 22. Его можно доказать так — перепишем выражение

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2} \geqslant 0.$$

Это типичный пример простейшего метода, который называется «выделением квадрата» (частенько выделяется несколько квадратов). Приведём ещё один пример.

Задача 39. Решите уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} = 0.$$

Как, скажете вы, это же не неравенство! Да, конечно, но, во-первых, здесь действует метод выделения квадрата, а во-вторых, на самом деле имеет место неравенство. Действительно,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} = \\ = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2c}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(c - \frac{3d}{4}\right)^2 + \frac{5}{8}\left(d - \frac{4}{5}\right)^2.$$

Отсюда и следует решение задачи.

Задача 40. Известно, что $a + b = 1$. Каково максимальное значение величины ab?

Указание. $a(1-a) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2$.

Задача 41. Докажите неравенство $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geqslant ab - ac + 2bc$ при любых a, b, c.

Задача 42. Пусть k, l, m — неотрицательные целые числа. Докажите, что

$$2^{k+l} + 2^{k+m} + 2^{l+m} \leqslant 2^{k+l+m+1} + 1.$$

Задача 43. Известно, что $a + b + c = 0$. Докажите, что $ab + bc + ca \leqslant 0$.

Разберём решение задачи 41. Переносим все слагаемые на одну сторону и выделим полный квадрат:

$$\frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab+ac-2bc=\left(\frac{a}{2}-b+c\right)^2\geqslant 0.$$

* * *

Теперь разберём одну замечательную идею, позволяющую доказывать некоторые симметричные неравенства (она также связана с разложением на множители).

Лемма. *Если $a\geqslant b$, $x\geqslant y$, то $ax+by\geqslant ay+bx$.*

Доказательство. В самом деле,

$$ax+by-ay-bx=(a-b)(x-y)\geqslant 0. \qquad \square$$

Комментарий. Аналогично, если f — некоторая возрастающая функция, то неравенство $(a-b)(f(a)-f(b))\geqslant 0$ для любых чисел a и b — это просто переформулировка определения возрастающей функции.

Эта идея применяется, например, так.

Задача 44. Докажите, что $\dfrac{x^6}{y^2}+\dfrac{y^6}{x^2}\geqslant x^4+y^4$ при любых x и y.

Решение. Обозначим $x^2=a$, $y^2=b$. Тогда

$$\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}-x^4-y^4=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}-a^2-b^2=$$
$$=\frac{(a-b)a^2}{b}+\frac{(b-a)b^2}{a}=(a-b)\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right)=\frac{(a-b)(a^3-b^3)}{ab}\geqslant 0$$

— ещё раз подчеркнём, что числа $a-b$ и a^3-b^3 имеют один знак.

Задача 45. Пусть x, $y>0$. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{y^2}{x}}\geqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Задача 46. Пусть a, b, $c\geqslant 0$. Докажите, что

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2.$$

Решение. Перенесём все слагаемые в одну часть и разобьём их на четвёрки:

$$[a^3+b^3-a^2b-ab^2]+[b^3+c^3-b^2c-bc^2]+[a^3+c^3-a^2c-ac^2].$$

Внутри каждой четвёрки выражение можно разложить на множители таким образом:

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a-b)(a^2-b^2)\geqslant 0.$$

Отсюда и следует требуемое неравенство.

Задача 47*. Пусть $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ и $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$. Докажите, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geqslant a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — любая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 48. Докажите, что при любом x выполняется неравенство

$$x(x+1)(x+2)(x+3)\geqslant -1.$$

Задача 49. Докажите, что при любых x, y, z выполнено неравенство

$$x^4+y^4+z^2+1\geqslant 2x(xy^2-x+z+1).$$

Задача 50*. Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}>\frac{9}{2}.$$

Задача 51. Пусть x, $y\geqslant 0$. Докажите, что $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8\geqslant 64xy(x+y)^2$.

Для преподавателей. Существует большое количество более сложных неравенств на использование как идеи из леммы, так и неравенства из задачи 47 (см. например, [108, 111]). Если задачи такого рода не подходят по уровню сложности для вашего кружка (факультатива), то следует лишь ознакомить школьников с основной идеей, продемонстрировав её на двух-трёх примерах.

§ 4. Индукция в неравенствах

Часто в неравенстве либо участвует переменная, пробегающая натуральные значения, либо одно из конкретных задействованных чисел является лишь «прикрытием» подобной натуральной переменной (см. например, задачу 7; кстати, умение распознать такую спрятавшуюся переменную представляет один из необходимых аспектов работы с задачей). Такие «натуральные» неравенства часто решаются при помощи метода математической индукции. Разберём пример.

Задача 52. Докажите, что при $n \geqslant 3$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}.$$

Решение. База: $n = 3$. Имеем

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} > \frac{3}{5}.$$

Докажем индукционный переход от $n = k$ к $n = k+1$:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+2}\Big) &= \\ = \Big(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}\Big) &> \\ > \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} &> \frac{3}{5},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Вообще, один из наиболее часто употребляемых методов индуктивного доказательства неравенств таков: допустим, что нам даны две последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, причём известно, что

а) $a_1 \geqslant b_1$ (база);
б) $a_k - a_{k-1} \geqslant b_k - b_{k-1}$ при любом $k \leqslant n$ (переход).

Тогда $a_n \geqslant b_n$.

Задача 53. Пусть n — натуральное число. Докажите, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Задача 54. Пусть n — натуральное число. Докажите, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

Задача 55. Пусть n — натуральное число. Докажите, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Если вы попробуете решить задачу 55 по приведённой выше схеме, то потерпите сокрушительное поражение. Последовательность

$$a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

монотонно растёт, а последовательность $b_n = 1$ не меняется. Утверждение пункта б) схемы просто неверно.

Что же делать? И вот здесь проявляется одно из удивительнейших свойств метода математической индукции. Оказывается, с его помощью часто бывает гораздо проще доказывать более трудное (так, во всяком случае, кажется) утверждение — или, как в нашем случае, более точное неравенство.

Решение. Выберем последовательность $b_n = 1 - \frac{1}{n}$.

База: $n = 2$. Имеем $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$ — всё в порядке.

Индукционный переход (по схеме!):

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{k^2}, \quad b_k - b_{k-1} = \frac{1}{k(k-1)},$$

т. е. $a_k - a_{k-1} < b_k - b_{k-1}$.

Отсюда вывод: для любого натурального n имеем $a_n < b_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$.

* * *

Задача 56 (неравенство Бернулли). Пусть $x \geqslant 0$, n — натуральное число. Докажите, что $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Подсказка. Докажите неравенство $1 + x \geqslant \frac{1 + (n+1)x}{1 + nx}$.

Комментарий. У задачи, конечно, имеется и неиндукционное решение, несложное для тех, кто хорошо знаком с биномом Ньютона (см. параграф «Бином Ньютона» в главе «Комбинаторика–2»). В самом деле,

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + \underline{C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n},$$

причём все подчёркнутые слагаемые, безусловно, неотрицательны. Следовательно,

$$(1+x)^n \geqslant 1 + C_n^1 x = 1 + nx,$$

что и требовалось доказать.

Задачи, аналогичные предыдущей (где речь идёт об оценке произведений), доказываются методом математической индукции уже по другой схеме: а именно, если доказано, что

а) $a_1 \geqslant b_1$ (база);

б) $\frac{a_k}{a_{k-1}} \geqslant \frac{b_k}{b_{k-1}}$ при всех $k \leqslant n$ (переход),

то $a_n \geqslant b_n$. Это опять очевидно следует из ММИ.

Задача 57. Пусть n — натуральное число. Докажите, что $n^n \geqslant (n+1)^{n-1}$.

Задача 58. Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 4$. Докажите, что $n! \geqslant 2^n$.

Задача 59. Пусть n — натуральное число. Докажите, что $2^n \geqslant 2n$.

Задача 60. При каких натуральных n выполнено неравенство $2^n \geqslant n^3$?

Разберём решение задачи 57. Имеем $a_n = n^n$, $b_n = (n+1)^{n-1}$. Проверяем первые значения $n = 1$, 2 и убеждаемся в том, что для них утверждение задачи верно, — это база индукции. Чтобы доказать индукционный переход, достаточно показать, что

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \geqslant \frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^{k-2}},$$

или, что то же самое, $k^{2k-2} \geqslant (k^2-1)^{k-1}$, т. е. $(k^2)^{k-1} \geqslant (k^2-1)^{k-1}$, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 61. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $3^n > n \cdot 2^n$.

Задача 62. Какое из чисел $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (10 двоек) и $3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$ (9 троек) больше? А если троек не 9, а 8?

Задача 63. Произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 1. Докажите, что $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n$.

Замечание. У задачи 63 имеются и другие решения, помимо индуктивного.

Задача 64. Докажите неравенство Бернулли $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, если известно лишь, что $x \geqslant -1$ и $n \geqslant 1$.

Задача 65. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна $\frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Для преподавателей. В этом параграфе смыкаются две большие темы, каждой из которых необходимо посвятить не одно занятие. Это темы «Неравенства» и «Индукция». Нужно отметить, что в теме «Индукция» раздел «Индукция в неравенствах» обычно усваивается школьниками лучше, чем другие (более абстрактные) разделы, особенно при чётком выделении двух стандартных схем индуктивного доказательства неравенств (это же отмечается и в главе «Индукция»). Однако не надо этим злоупотреблять, хотя задач, подобных задачам 52–60, можно придумать очень много. Почаще давайте ребятам задачи на нестандартные рассуждения, не требуйте от них обязательно индуктивного решения. Теме «Индукция в неравенствах» вполне можно посвятить отдельное занятие кружка (факультатива).

§ 5. Неравенства на любой вкус

Задачи в этом параграфе даны подряд, без всякого упорядочения по идеям решения. Однако они примерно выстроены по их сложности и предназначены для самостоятельного решения.

Задача 66. Вокруг экватора натянули верёвку. Затем её удлинили на 1 см и опять натянули, приподняв в одном месте. Сможет ли человек пройти в образовавшийся зазор?

Задача 67. Представьте себе, что Землю «раскатали в колбаску» так, чтобы она достала до Солнца. Какой толщины будет эта «колбаска»? Постарайтесь ошибиться не более чем в 10 раз.

Задача 68. Поместится ли всё население Земли, все здания и сооружения на ней в куб с длиной ребра 3 километра?

Задача 69. Представьте себе, что вы стоите на Дворцовой набережной Невы. Как вам, используя только подручные средства и глазомер, оценить высоту шпиля на соборе Петропавловской крепости?

Задача 70. Докажите, что $100! < 50^{100}$.

Задача 71. Пусть n — натуральное число. Докажите, что

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Задача 72. Известно, что $1 > x > y > 0$. Докажите, что $\dfrac{x-y}{1-xy} < 1$.

Задача 73. Пусть a, b, c, $d \geqslant 0$, причём $c + d \leqslant a$, $c + d \leqslant b$. Докажите, что $ad + bc \leqslant ab$.

Задача 74. Существует ли набор чисел, сумма которых равна 1, а сумма их квадратов меньше 0,01?

Задача 75. Пусть a, b, $c > 0$ и $abc = 1$. Известно, что $a + b + c > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Докажите, что ровно одно из чисел a, b, c больше 1.

Задача 76. Пусть x, y — числа из отрезка $[0; 1]$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leqslant 1.$$

Задача 77. Пусть a, b, c — натуральные числа и $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < 1$. Докажите, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{41}{42}$.

Задача 78. Пусть x, y, z — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leqslant 2.$$

Задача 79. Докажите, что

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)>\frac{1}{2}.$$

Задача 80. Докажите, что для любого x выполнено неравенство

$$x^4-x^3+x^2-2x+2\geqslant 0.$$

Задача 81. Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[0;1]$. Докажите, что

$$(a+b+c+d+1)^2\geqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Задача 82. Пусть x, $y>0$. Через S обозначим наименьшее из чисел x, $1/y$, $y+1/x$. Какое максимальное значение может принимать величина S?

Задача 83*. Пусть a, b, c, d — положительные числа. Докажите, что по крайней мере одно из неравенств

1) $a+b<c+d$;
2) $(a+b)cd<ab(c+d)$;
3) $(a+b)(c+d)<ab+cd$

неверно.

Задача 84*. Докажите, что три неравенства

$$\frac{a_1b_2}{a_1+b_2}<\frac{a_2b_1}{a_2+b_1},\quad \frac{a_2b_3}{a_2+b_3}<\frac{a_3b_2}{a_3+b_2},\quad \frac{a_3b_1}{a_3+b_1}<\frac{a_1b_3}{a_1+b_3}$$

не могут быть все верны одновременно, если числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ положительны.

Задача 85*. Докажите, что если $x+y+z\geqslant xyz$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant xyz$.

Задачник второго года

Отметим, что некоторые темы «первого года» получили своё развитие во второй части; другие же («Чётность», «Принцип Дирихле», «Игры») — нет. Однако многие задачи по этим трём темам ввиду своей трудности не были включены в материалы первой части. Мы начинаем задачник второго года с восполнения этого пробела.

§ 1. Чётность

1. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$$

не имеет решений в нечётных натуральных числах.

2. На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных полях, чётно.

3. Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

4. На прямой даны точки A и B, а также 1001 точка вне отрезка AB, которые покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма расстояний от A до красных точек, сложенная с суммой расстояний от B до синих точек, отлична от суммы расстояний от B до красных точек, сложенной с суммой расстояний от A до синих точек.

5. Есть 10 пар карточек, на которых написаны числа $0, 0, 1, 1, \ldots, 8, 8, 9, 9$. Докажите, что их нельзя выложить в ряд так, чтобы между любыми двумя карточками, на которых написаны одинаковые цифры n, лежало ровно n других карточек ($n = 0, 1, \ldots, 9$).

6. На окружности отмечено 20 точек, являющихся вершинами правильного 20-угольника, после чего они разбиты на 10 пар и в каждой

паре точки соединены хордой. Докажите, что какие-то две хорды имеют одинаковую длину.

7. Квадрат размерами 6×6 покрыт без наложения костями домино размером 1×2. Докажите, что квадрат можно разрезать по вертикали или горизонтали, не повредив ни одной доминошки.

8. Улитка выползла из начала координат и поползла по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая каждые полчаса на 60°. Докажите, что вернуться в начало координат она может только за целое число часов.

9*. Дано n магнитофонных лент, намотанных на катушки красными концами наружу и зелёными внутрь. При каких n можно их перемотать, пользуясь одной пустой катушкой, так, чтобы они оказались на своих прежних катушках зелёными концами наружу?

§ 2. Принцип Дирихле

10. Прямая раскрашена в 11 цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на целом расстоянии друг от друга.

11. На плоскости дано 7 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол, меньший 26°.

12. Каждая клетка прямоугольной таблицы 5×41 покрашена в белый или чёрный цвет. Докажите, что можно выбрать 3 столбца и 3 строки, все 9 клеток пересечения которых покрашены в один цвет.

13*. Плоскость раскрашена а) в 2; б) в 3; в) в 100 цветов. Докажите, что найдётся прямоугольник с вершинами одного цвета.

14. Шестеро друзей решили в воскресенье побывать в семи кинотеатрах, сеансы в которых начинаются в 9, 10, 11, …, 19 часов. На каждый сеанс двое из них шли в один кинотеатр, остальные — в другой. Вечером выяснилось, что каждый из них посетил в этот день все семь кинотеатров. Докажите, что в каждом кинотеатре хотя бы на одном сеансе в этот день не был никто из друзей.

15. Какое наибольшее число пауков может находиться на рёбрах куба, если паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем а) 1 м; б) 1,1 м? Длина ребра куба — 1 м, расстояние измеряется вдоль рёбер.

16. В каждом из двух одинаковых правильных 16-угольников отмечено по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоуголь-

ники друг на друга, чтобы не менее 4 отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.

17. Докажите, что из любых 10 двузначных чисел можно выбрать две непересекающиеся группы с равными суммами.

18. На плоскости дано 25 точек. Известно, что из любых трёх точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что среди данных точек найдутся 13, лежащие в круге радиуса 1.

19. В прямоугольнике 3×4 отмечено 6 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит $\sqrt{5}$.

20. Множество A состоит из натуральных чисел, причём среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть число из A. Докажите, что в A найдутся четыре различных числа a, b, c, d, удовлетворяющие условию $a + b = c + d$.

21. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков, каждый из которых состоит из 4 клеток. Докажите, что можно вырезать ещё один такой же квадратик.

22. Клетчатый лист бумаги размером 10×10 покрыт 55 квадратиками, состоящими из 4 клеток. Докажите, что один из них можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

23*. Шахматист играет не менее одной партии в день и не более 12 за календарную неделю. Докажите, что в течение года найдутся несколько идущих подряд дней, за которые он сыграл ровно 20 партий.

24. На отрезке длины 10 несколько меньших непересекающихся отрезков покрашены в красный цвет, причём никакие две красные точки не находятся на расстоянии 1 друг от друга. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 5.

25. В квадрате 1×1 дана 101 точка. Докажите, что какие-то три из них лежат в вершинах треугольника площади, не большей 0,01.

26. В квадрат 1×1 поместили несколько кругов, сумма радиусов которых равна $3/5$. Докажите, что есть прямая, параллельная стороне квадрата, которая пересекает не менее двух кругов.

27. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд так, что любой диаметр пересекает не более четырёх из них. Докажите, что сумма длин хорд не превосходит 13.

28*. На квадратном столе лежат 100 механических часов. Докажите, что в некоторый момент времени сумма расстояний от центра стола

до центров часов будет меньше, чем сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок.

§ 3. Игры

Во всех задачах этого параграфа предполагается, что играют двое и ходы делаются по очереди. Если явно не оговорено противное, требуется выяснить, кто побеждает: начинающий или его партнёр?

29. В каждом из первых (слева) трёх полей полоски 1×20 стоит по фишке. За ход разрешается передвинуть любую фишку на произвольное свободное поле справа от неё, не перенося её через другие фишки. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

30. В каждом из первых (слева) трёх полей полоски 1×20 стоит по фишке. За ход разрешается либо передвинуть любую фишку в соседнюю справа клетку, если она не занята, либо, если эта клетка занята, но следующая за ней свободна, переставить фишку в эту свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

31. На доске написано число 1234. Ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую-либо его ненулевую цифру, и написать полученное число вместо старого. Выигрывает тот, кто получит 0.

32. В ряд выписаны числа от 1 до 100. За ход разрешается вставить между любыми двумя числами один из знаков «+», «—», «×» (игроки сами выбирают, на какое из свободных мест поставить очередной знак). Начинающий выигрывает, если значение получившегося выражения нечётно, и проигрывает в противном случае.

33. В ряд выписаны числа 1, 2, 3, …, 20, 21. За ход разрешается вычеркнуть любое из ещё не вычеркнутых чисел. Игра продолжается до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает начинающий, в противном случае — его партнёр.

34. Дана доска размером а) 9×9; б)* 10×10. За ход разрешается поставить в любую незанятую клетку крестик или нолик (игрок сам решает, что ставить). Выигравшим считается игрок, после хода которого на доске окажутся три одинаковых знака в ряд (по горизонтали, вертикали или диагонали).

35. На столе есть две кучки конфет: в первой — 22 конфеты, во второй — 23. За ход можно либо съесть две конфеты из одной кучки, либо

переложить одну конфету из первой кучки во вторую. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

36. Начинающий пишет на доске одну из цифр 6, 7, 8, 9. Каждый следующий ход состоит в дописывании одной из этих цифр к уже имеющемуся числу. Игра заканчивается после а) 10-го; б) 12-го хода. Может ли начинающий добиться того, чтобы получившееся число не делилось на 9?

37. Двое играют в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим ходом он должен ставить крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседними называются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину. Второй играющий любым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом с друг другом). Докажите, что, как бы ни играл начинающий, второй игрок может его запереть: добиться того, чтобы начинающему некуда было поставить крестик.

38. В куче 1001 спичка. За ход можно выкинуть из кучи спички в количестве p^n штук (где p — любое простое число, $n = 0, 1, 2, \ldots$). Выигрывает тот, кто берёт последнюю спичку.

39. Из доски торчит 1991 гвоздь. За ход разрешается соединить проводом любые два не соединённых ещё гвоздя. Если в результате хода появилась замкнутая цепь, то сделавший этот ход считается а) проигравшим; б) выигравшим.

40. Ход состоит в закрашивании одной или нескольких клеток, образующих квадрат, на доске размером а) 19×91; б) 19×92. Закрашивать клетки дважды запрещается. Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку.

41*. Имеется лист клетчатой бумаги размером 30×45. За один ход производится разрез по линии, соединяющей два соседних узла сетки. Первый игрок начинает резать от края листа. Каждый следующий разрез должен продолжать линию, образованную предыдущими разрезами. Выигрывает игрок, после хода которого лист распадается на два куска.

42*. Король за ход может поставить по крестику в любые две свободные клетки бесконечного листа бумаги. Министр за ход может поставить нолик в любую свободную клетку. Может ли король поставить 100 крестиков в ряд?

§ 4. Задачи на конструкцию

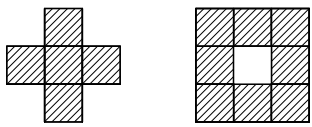
43. Путешественник прибыл в гостиницу, имея золотую цепочку из 7 звеньев. Хозяин требует с него плату за проживание — одно звено ежедневно. Какое минимальное число звеньев надо распилить путешественнику, чтобы каждый день платить хозяину гостиницы требуемое количество золота?

44. Можно ли выписать в ряд 10 чисел так, чтобы сумма любых пяти чисел подряд была бы положительна, а сумма любых семи подряд — отрицательна?

45. Найдите 10-значное число, первая цифра которого равна количеству нулей в записи этого числа, вторая цифра равна количеству единиц в записи и т. д., а десятая цифра равна количеству девяток в записи.

46. Али-Баба хочет проникнуть в Сезам. Перед входом в пещеру установлен барабан с 4 отверстиями, внутри каждого из которых находится кувшин с селёдкой внутри. Селёдка может лежать в кувшине либо хвостом вверх, либо хвостом вниз. Али-Баба может засунуть руки в любые два отверстия и, ощупав селёдки, положить их там произвольным образом. После этого барабан приходит во вращение, и, после того как он остановится, Али-Баба не может определить, в какие отверстия он засовывал руки до этого. Сезам откроется в тот момент, когда все 4 селёдки будут расположены одинаково. Как надо действовать Али-Бабе?

47. Как раскрасить лист клетчатой бумаги в 5 цветов так, чтобы внутри любой фигуры типа A (рис. 112) клетки были окрашены во все 5 цветов, а внутри любой фигуры типа B — не во все?



A *B*

Рис. 112

48. Нарисуйте фигуру, которой нельзя покрыть полукруг радиуса 1, но двумя экземплярами которой можно покрыть круг радиуса 1.

49. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы любые три из них лежали в вершинах равнобедренного треугольника.

50. Нарисуйте на плоскости несколько неперекрывающихся квадратов так, чтобы их нельзя было правильно раскрасить в 3 цвета. Правильной называется раскраска, при которой любые две фигуры, имеющие общую часть границы, окрашены в разные цвета.

51. Покройте плоскость неперекрывающимися квадратами, среди которых всего два одинаковых.

52. Постройте многоугольник и точку на плоскости так, чтобы ни одна сторона многоугольника не была целиком видна из этой точки, если а) точка находится внутри многоугольника; б) точка находится вне многоугольника.

53*. Отметьте на плоскости 7 таких точек, что среди любых трёх из них найдутся две на расстоянии 1 друг от друга.

§ 5. Геометрия

Цикл 1. Геометрические неравенства

В главе «Геометрия» мы уже познакомили читателя с некоторыми задачами на доказательство геометрических неравенств. В данном цикле собрано несколько более трудных и нестандартных задач на эту тему.

54. Докажите, что круги, построенные на двух сторонах треугольника как на диаметрах, покрывают весь треугольник.

55. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах, покрывают весь четырёхугольник.

56. Докажите, что у выпуклого многоугольника не может быть более трёх острых углов.

57. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике сумма любых двух углов больше, чем разность любых двух других углов.

58. На плоскости дан круг радиуса 1 и пять прямых, пересекающих его. Про точку X известно, что она находится на расстоянии 11,1 от центра круга. Докажите, что если последовательно отразить точку X относительно всех пяти прямых, то полученная точка не может находиться внутри данного круга.

59. Астроном наблюдает 50 звёзд, сумма попарных расстояний между которыми равна S. Набежавшее облако заслонило 25 звёзд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звёздами меньше чем $S/2$.

60. Квадрат 1×1 разрезан на несколько прямоугольников. Для каждого из них вычисляется отношение меньшей стороны к большей. Докажите, что сумма этих чисел не может быть меньше, чем 1.

61. Вершины треугольника ABC находятся в узлах сетки листа клетчатой бумаги с длиной стороны клетки 1. Известно, что $AB > AC$. Докажите, что $AB - AC > 1/p$, где p — периметр треугольника ABC.

Цикл 2. Комбинаторная геометрия

Здесь собраны задачи, относящиеся к так называемой «комбинаторной геометрии». Этот раздел геометрии изучает различные комбинаторные свойства расположений на плоскости (и в пространстве) геометрических фигур: точек, прямых, многоугольников и т. д. В этот же раздел обычно включают и изучение свойств выпуклости.

62. На отрезке AB отмечено 200 точек так, что весь набор симметричен относительно середины отрезка. Сто точек покрашено в синий, а остальные — в красный цвет. Докажите, что сумма расстояний от A до красных точек равна сумме расстояний от B до синих точек.

63. На плоскости дано 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то четыре из них лежат в вершинах выпуклого четырёхугольника.

64. Квадрат 2×2 разрезан на несколько (более одного) прямоугольников. Докажите, что мы можем заштриховать несколько из них так, чтобы проекция заштрихованной фигуры на одну сторону квадрата имела длину не меньше 1, а на другую — не больше 1.

65. Шесть одинаковых монет лежат на столе, образуя замкнутую цепочку. Седьмая монета прокатывается по внешней стороне цепочки без скольжения, касаясь по очереди всех монет цепочки. Сколько оборотов она сделает, вернувшись в исходное положение?

66. В пространстве дана 8-звенная несамопересекающаяся замкнутая ломаная, вершины которой совпадают с вершинами некоторого куба. Докажите, что одно из звеньев ломаной совпадает с ребром куба.

67*. На прямой дано несколько отрезков, причём любые два из них пересекаются. Докажите, что есть точка, принадлежащая всем отрезкам.

68. Несколько отрезков покрывают отрезок $[0; 1]$. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся отрезков, сумма длин которых не меньше $1/2$.

69*. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины длины исходного отрезка.

§ 6. Целые числа

70. Найдите все трёхзначные натуральные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

71. Число $\overline{abc}$ простое. Докажите, что $b^2 - 4ac$ не является квадратом.

72. Четвёртая степень некоторого натурального числа записывается цифрами 0, 1, 4, 6, 7, 9 в некотором порядке. Найдите это число.

73. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел найдётся одно, сумма цифр которого делится на 11.

74. Существуют ли два таких различных семизначных числа, каждое из которых записано цифрами $1, 2, \ldots, 7$ без повторений, что одно из них делится на другое?

75. Разность чисел $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b = d$ и $c = e$.

76. Существуют ли двузначные числа, квадрат которых оканчивается на те же цифры, которыми записано исходное число, но в обратном порядке?

77. Целые числа A, B и C таковы, что $Ax^2 + Bx + C$ делится на 5 при любом целом x. Докажите, что A, B и C делятся на 5.

78. Найдите все такие натуральные n, что число $n^n + 1$ имеет не более 19 цифр и является простым.

79*. Натуральное число y получено из числа x перестановкой цифр. Известно, что $x + y = 10^{200}$. Докажите, что x делится на 50.

80*. Докажите, что число вида $\overline{a000\ldots00b}$ (цифры a и b — ненулевые, и запись содержит не менее одного нуля) не может быть точным квадратом.

§ 7. Принцип крайнего и полуинвариант

В этом параграфе представлены задачи, использующие одну из двух близких идей. Первая идея — рассмотрение самого «крайнего» в каком-либо смысле объекта: самого большого числа, пары наиболее удалённых точек, наименьшего угла и т. д.

Вторая идея — «полуинвариант». Она естественным образом продолжает идею инварианта. Под полуинвариантом понимается величина, которая в процессе преобразований изменяется монотонно, т. е. увеличивается или уменьшается. Типичный пример полуинварианта: возраст человека, который может только увеличиваться с течением времени.

81. а) В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое есть среднее арифметическое своих соседей. Докажите, что все эти числа равны между собой.

б) Докажите то же, если числа расставлены в клетках шахматной доски, причём каждое число не превосходит среднего арифметического своих соседей.

Разберём решение задачи 81а. Рассмотрим самое маленькое число. Очевидно, что соседние с ним числа должны совпадать с ним, а значит, и соседние с ними должны быть такими же, и т. д.

82. Докажите, что для любых 10 точек на плоскости найдутся пять непересекающихся отрезков, концы которых совпадают с данными точками.

83. Можно ли выбрать на плоскости несколько отрезков так, чтобы любая точка, являющаяся концом одного из них, лежала внутри какого-то другого отрезка?

84. Безрукий вор хочет столкнуть носом какую-нибудь монету со стола менялы, не задев ею других монет. Удастся ли ему это?

85. а) На столе лежат монеты одинакового радиуса. Докажите, что есть монета, касающаяся не более чем трёх других монет.

б) В случае монет разных радиусов докажите, что есть монета, касающаяся не более чем пяти других.

86. В некотором государстве расположено несколько аэродромов, все расстояния между которыми различны. С каждого аэродрома взлетает самолёт и летит на ближайший аэродром. Докажите, что на любом аэродроме приземлится не более пяти самолётов.

87. В космическом пространстве летает 1991 астероид, на каждом из которых сидит астроном, причём все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

88. Сумасшедший путешественник едет из родного города A в самый удалённый от него город B (если таких городов несколько, он выби-

рает произвольный). Затем оттуда он едет в самый удалённый от B город C, который оказывается на большем расстоянии от B, чем A. Оттуда путешественник продолжает своё путешествие в самый удалённый от C город D, и т. д., каждый раз выбирая наиболее удалённый город от того, в котором он в данный момент находится. Докажите, что путешественник никогда не вернётся в A.

89. В ряд выложены 100 монет: орёл, решка, орёл, решка, … За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое минимальное количество ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

90. В колонию из 1984 бактерий попадает вирус. Каждую секунду каждый вирус уничтожает одну бактерию, после чего все бактерии и все вирусы делятся надвое. Докажите, что рано или поздно все бактерии будут уничтожены, и выясните, в какой момент это произойдёт?

91. В клетках прямоугольной таблицы расставлены вещественные числа. Разрешается одним ходом сменить знак у всех чисел, стоящих в любом «кресте» (так мы называем объединение клеток одной произвольной строки и одного произвольного столбца). Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы сумма чисел в таблице была неотрицательна.

92*. В графе с n вершинами степень каждой вершины не превосходит пяти. Докажите, что вершины можно раскрасить в три цвета так, что рёбер с одноцветными концами будет не более $n/2$.

93*. По окружности расставлены вещественные числа. Если четыре последовательно стоящих числа a, b, c и d таковы, что $(a-d)(b-c)>0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что такие перестановки мы сможем выполнять лишь конечное число раз.

§ 8. Дискретная непрерывность

В этом параграфе собраны задачи, решение которых основано на очень простом соображении, которое можно наглядно продемонстрировать следующим образом. Пусть блоха прыгает по целым числам, каждый раз перепрыгивая на соседнее число. Тогда если исходно она находилась на отрицательном числе, а в конце — на положительном, то в какой-то момент она побывала в нуле.

94. На плоскости дано 100 точек. Докажите, что есть прямая, по обе стороны от которой лежит по 50 точек данного набора.

Разберём решение задачи 94. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через пары точек нашего 100-элементного множества. Проведём любую прямую, не параллельную ни одной из них и такую, что все 100 точек лежат по одну сторону от неё. Начнём параллельно самой себе двигать её к этим точкам и следить за тем, как изменяется количество точек за прямой. Очевидно, что в какой-то момент оно станет равно 50. Это и есть нужная нам прямая.

95. В ряд выложено 100 чёрных и 100 красных шаров, причём самый левый и самый правый шары чёрные. Докажите, что можно выбрать слева подряд несколько шаров (но не все!) так, что среди них количество красных равно количеству чёрных.

96. Матч «Зенит» — «Ювентус» окончился со счётом 8:5. Докажите, что в матче был такой момент, когда «Зениту» оставалось забить столько мячей, сколько «Ювентус» уже забил к этому времени.

97. Докажите, что в шестизначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трёх первых и трёх последних цифр находилась в промежутке от 0 до 9.

98. В клетках доски 8×8 расставлены $+1$ и -1, причём так, что сумма всех чисел равна нулю. Докажите, что доску можно разрезать на два куска так, чтобы сумма чисел в каждом из кусков была равна нулю.

99. Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.

100. В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят $+1$ и -1, причём абсолютная величина суммы всех чисел не больше 100. Докажите, что есть квадрат 25×25, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25.

101*. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 1$, и $a_{n+1} - a_n$ равно 0 или 1 при любом n. Известно, что $a_n = n/1000$ для некоторого n. Докажите, что $a_m = m/500$ для некоторого m.

§ 9. Исследовательские задачи

В этом параграфе собрано несколько так называемых «исследовательских» задач, суть которых состоит в последовательном решении цепочки нетрудных лемм, складывающихся в доказательство довольно

трудной теоремы. Такие задачи очень полезно использовать в качестве домашнего задания, а по некоторым из них даже можно проводить отдельные занятия.

102. Правильный треугольник на клетчатой бумаге.

а) Докажите, что у всякого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги удвоенная площадь есть целое число.

б) Вычислите высоту равностороннего треугольника со стороной a и найдите его площадь.

в) Докажите, что квадрат длины отрезка с вершинами в узлах клетчатой бумаги — целое число.

г) Докажите, что если существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах, то $\sqrt{3}$ является отношением двух натуральных чисел.

д) Докажите, что если квадрат несократимой дроби — целое число, то знаменатель этой дроби равен единице.

е) Докажите, что нельзя расположить равносторонний треугольник на клетчатой бумаге так, чтобы его вершины лежали в узлах.

103. Формула Пика. *Площадь многоугольника, вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги, равна*

$$a + \frac{b}{2} - 1,$$

где a — число узлов, лежащих внутри многоугольника, b — число узлов на его сторонах.

а) Проверьте формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

б) Проверьте формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

в) Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана.

г) Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одного из этих двух многоугольников, то она выполняется и для другого.

д) Докажите, что для любого треугольника с вершинами в узлах сетки формула Пика верна.

е)* Докажите, что любой многоугольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники (см. задачу 31 главы «Индукция»).

ж) Докажите формулу Пика в общем случае.

104. Теорема Бойяи — Гервина. *Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены, т. е. один из них можно разбить на несколько частей, из которых можно составить другой.*

а) Докажите, что параллелограммы с общим основанием и равными высотами равносоставлены.

б) Докажите, что если многоугольники P_1 и P_2 равносоставлены, а также равносоставлены многоугольники P_2 и P_3, то и многоугольники P_1 и P_3 равносоставлены.

в) Докажите, что два равновеликих параллелограмма равносоставлены.

г) Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

д) Докажите, что любой треугольник равносоставлен с прямоугольником, одна из сторон которого имеет длину 1.

е) Докажите теорему Бойяи — Гервина.

105. Делимость чисел Фибоначчи.

а) Докажите для любых натуральных m и n индукцией по n формулу

$$\Phi_{m+n} = \Phi_{m+1}\Phi_n + \Phi_m\Phi_{n-1}.$$

б) Докажите, что Φ_{km} делится на Φ_m (индукция по k).

в) Докажите, что если n делится на $m > 2$, то число Φ_n составное.

г) Докажите, что у любого составного числа, не равного 4, есть собственный делитель, больший 2.

д) Докажите, что если число Φ_n простое, то либо $n = 4$, либо n — простое число.

106. Теорема Хелли. *На плоскости дано несколько выпуклых множеств, любые три из которых имеют общую точку. Тогда все эти множества имеют общую точку.*

а) На плоскости отмечено четыре точки, помеченные наборами цифр 123, 124, 234 и 134. Разрешается соединять любые две точки, помеченные какими-либо цифрами, и помечать все точки этого отрезка всеми цифрами, которыми одновременно помечены оба его конца. Докажите, что так можно построить точку, которая будет помечена всеми четырьмя цифрами.

б) Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло.

в) Докажите теорему Хелли для четырёх множеств A_1, A_2, A_3 и A_4: помните, что у любых трёх из них есть общая точка.

г) Докажите теорему Хелли в общем случае индукцией по количеству выпуклых множеств.

§ 10. Смесь

107. Клетки доски 9×9 окрашены в два цвета. Разрешается в любом прямоугольнике 3×1 перекрасить все клетки в тот цвет, который преобладал в нём ранее. Докажите, что при помощи таких операций можно добиться того, чтобы вся доска была окрашена в один цвет.

108. Могут ли 6 попарных разностей между 4 числами быть равны 2, 2, 3, 4, 5, 6?

109. В посёлке 1970 жителей. Ежедневно некоторые из них меняют друг у друга гривенник на два пятака. Может ли так оказаться, что в течение недели каждый из жителей посёлка отдал при обменах ровно 10 монет?

110. Петя, Коля и Вася решали задачи из задачника и решили вместе 100 задач, при этом каждый из них решил ровно 60 задач. Будем называть задачу, которую решили все трое, «лёгкой», а задачу, которую решил только один из них, — «трудной». Докажите, что «трудных» задач ровно на 20 больше, чем «лёгких».

111. Известно, что квадрат числа x имеет десятичную запись вида $0{,}999\ldots99\ldots$ (после запятой 100 девяток). Докажите, что и само число x имеет десятичную запись такого типа.

112. На доске 100×100 стоят 50 ладей, и в левом нижнем углу стоит король. Король идёт по диагонали в правый верхний угол доски, и после каждого его хода одна из ладей также делает ход. Докажите, что в какой-то момент король окажется под боем одной из ладей.

113. В дроби $0{,}1234567891011\ldots$ после запятой подряд выписаны все натуральные числа. Является ли эта дробь периодической?

114. Трое игроков играют в настольный теннис, причём тот, кто не принимает участия в данной партии, в следующей игре играет с победителем. В результате первый игрок сыграл 10 партий, второй — 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

115. Про числа x и y известно, что $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 10$. Докажите неравенство $x - 2y \leqslant 200$.

116. В таблице 10×10 все клетки левой половины доски окрашены в чёрный цвет, остальные — в белый. Разрешается за ход менять цвет всех клеток в любой строке и в любом столбце. Можно ли при помощи нескольких таких операций добиться шахматной раскраски?

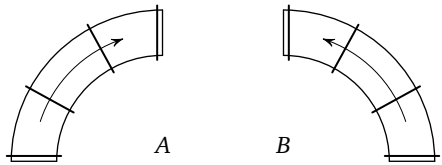


Рис. 113

117. Набор детской железной дороги состоит из участков полотна двух типов (рис. 113), причём из них можно сложить замкнутую железную дорогу так, что направление движения поезда будет совпадать со всеми направлениями стрелок. Один из участков типа *A* был потерян, и его заменили на участок типа *B*. Докажите, что теперь сложить такую же замкнутую дорогу не удастся.

118. Город представляет собой выпуклый многоугольник, диагонали которого — улицы, а точки пересечения диагоналей и вершины — перекрёстки. По некоторым улицам проложены трамвайные линии. Известно, что через любой перекрёсток проходит не менее одной такой линии. Докажите, что от любого перекрёстка до любого другого можно добраться, сделав не более двух пересадок.

119. В трёх деревнях живёт соответственно 100, 200 и 300 школьников. В каком месте надо строить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое детьми, было минимально?

120. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

121. В трёх вершинах квадрата сидят три кузнечика. Они начинают играть в чехарду, перепрыгивая друг через друга, причём на то же расстояние, которое разделяло их до прыжка. Может ли один из кузнечиков оказаться в четвёртой вершине квадрата?

122. На арене цирка в ряд выстроено 25 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Известно, что если к весу каждого слона (кроме самого правого) прибавить половину веса его соседа справа, то получится ровно 6 тонн. Сколько весит каждый слон?

123. Из угла бильярдного стола размерами 101×200 по биссектрисе этого угла выкатывается шар и двигается далее, отражаясь от сторон бильярда. Попадёт ли он когда-нибудь вновь в какой-то угол?

124. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали, которые делят его на несколько частей. Какое наибольшее число сторон может иметь такая часть?

125. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ число

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не является целым.

126. Какой наибольший радиус может иметь окружность, расположенная на шахматной доске так, что она проходит лишь по чёрным полям?

127. Есть розетка, по краю которой равномерно проделаны 6 отверстий, и аналогичный штепсель. Отверстия в розетке как-то занумерованы числами от 1 до 6, и то же самое сделано со штырями штепселя. Докажите, что штепсель можно воткнуть в розетку так, что ни один штырь не войдёт в дырку с тем же номером, что и он сам, если штырей и отверстий семь.

128. Два натуральных числа m и n имеют своими делителями числа $a_1, \ldots, a_p$ и $b_1, \ldots, b_q$ соответственно, причём известно, что

$$a_1 + \ldots + a_p = b_1 + \ldots + b_q,$$
$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_p} = \frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_q}.$$

Докажите, что $m = n$.

129. Имеется неограниченный запас монет достоинством 1 коп., 2 коп., 5 коп., 10 коп., 20 коп., 50 коп. и 1 рубль. Известно, что сумму в A копеек можно разменять при помощи B таких монет. Докажите, что сумму в B рублей можно разменять при помощи A таких монет.

130. Можно ли расставить по окружности 100 последовательных натуральных чисел так, чтобы произведение любых двух соседних было точным квадратом?

131. За круглым столом сидят n физиков и n химиков, причём некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят только правду. Известно также, что число физиков-лжецов равно количеству химиков-лжецов. Каждый из сидящих за столом произносит: «Мой сосед справа — химик». Докажите, что n чётно.

132. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^2 + ab + 1$ делится на $b^2 + ba + 1$. Докажите, что $a = b$.

133. Каждому из двух гениальных математиков сообщили по натуральному числу, причём им известно, что эти числа отличаются на единицу. Они поочерёдно спрашивают друг друга: «Известно ли тебе

моё число?» Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит на вопрос утвердительно.

134. По окружности выписано 100 целых чисел, сумма которых равна 1. Назовём цепочкой набор из нескольких подряд стоящих чисел. Сколько имеется цепочек, сумма чисел в которых положительна?

135. В шахматном турнире каждый из шахматистов набрал ровно половину своих очков во встречах с участниками, занявшими три последних места[1]. Сколько человек принимало участие в турнире?

136. Про числа a, b, c известно, что

$$a+b+c=7 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}.$$

137*. В 120-квартирном доме живут 119 человек. Квартира называется перенаселённой, если в ней живёт не менее 15 человек. Каждый день жильцы одной из перенаселённых квартир ссорятся и разъезжаются по разным квартирам. Верно ли, что переезды рано или поздно прекратятся?

138*. На кольцевой автотрассе стоит несколько машин, в баках которых находится количество бензина, достаточное для того, чтобы объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин может объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.

139*. Последовательность $1, 9, 8, 2, \ldots$ такова, что каждый её член начиная с пятого равен последней цифре суммы четырёх предыдущих членов. Встретится ли когда-нибудь в этой последовательности четвёрка подряд идущих членов 3, 0, 4, 4?

140*. В куче лежат 25 камней. Её делят на две части, затем одну из частей опять делят надвое и т. д., до тех пор пока не получат 25 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Докажите, что в конце сумма всех чисел на доске будет равна 300.

141*. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди её знакомых

[1] Победитель шахматной партии получает 1 очко, проигравший — 0 очков; в случае ничьи каждый получает $\frac{1}{2}$ очка.

мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живёт не меньше, чем девочек.

142*. Улитка ползёт по прямой на протяжении 6 минут, при этом за ней наблюдают несколько человек. Каждый из них наблюдал за ней ровно минуту, и за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Известно, что в любой момент времени на протяжении этих 6 минут за улиткой наблюдал хотя бы один человек. Какое наибольшее расстояние она могла проползти за это время?

Приложение

Математические соревнования

§ 1. Введение

> Всех путников, проходивших мимо, заставлял Сфинкс отгадывать свою загадку, но никто не мог этого сделать, и все гибли мучительной смертью… Пришёл Эдип к Сфинксу; тот предложил ему свою загадку:
>
> — Скажи мне, кто ходит утром на четырёх ногах, днём — на двух, а вечером на трёх? Никто из всех существ, живущих на земле, не изменяется так, как он. Когда ходит он на четырёх ногах, тогда меньше у него сил и медленнее двигается он, чем в другое время.
>
> *Н. А. Кун.* «Легенды и мифы Древней Греции»

Судя по всему, загадка, которую предложил Эдипу Сфинкс, была первой олимпиадной задачей в полном смысле слова. К счастью, соревнование между этими античными персонажами закончилось для Эдипа благополучно.

Современные математические соревнования не требуют человеческих жертв, и многие школьники с удовольствием принимают в них участие. Некоторые увлекаются ими настолько, что становятся настоящими профессионалами на арене этих уникальных испытаний, совмещающих в себе математику, спорт и тест на психологическую устойчивость. Мы надеемся, что и вам, уважаемый читатель, понравятся те соревнования, о которых пойдёт речь в этом приложении.

Для преподавателей. 1. Помните, что школьники очень любят превращать серьёзное дело в игру, в спортивное развлечение. На первых порах это вполне приемлемо и может использоваться как один из путей для знакомства ребят с новой для них математикой. Однако это ни в коем

случае не должно стать основным направлением деятельности кружка, иначе он превратится в аттракцион.

2. Материал для соревнований вполне можно почерпнуть в других главах этой книги. Впрочем, есть множество других хороших книг, из которых можно брать задачи для олимпиад, матбоёв, матдрак и т. д., — большинство из них указано в списке литературы. Много несложных задач по элементарной математике и на сообразительность собрано в книге [61].

§ 2. Математический бой

Матбой — одно из самых популярных в Ленинграде математических соревнований. Он был изобретён в середине 60-х годов учителем математики ленинградской школы № 30 Иосифом Яковлевичем Веребейчиком. Это командное соревнование, замечательным образом сочетающее в себе математику, спорт и театральное действо.

Изложим вкратце правила матбоя. Каждая из двух команд получает список задач, подготовленный жюри (задачи, естественно, у команд одни и те же). Через некоторое время, отведённое для решения этих задач, команды собираются в одном месте (с доской и мелом), и начинается собственно матбой.

Сначала при помощи конкурса капитанов определяется очерёдность выступления команд. Капитанам одновременно задаётся какой-либо простой вопрос, на который они должны тут же, у доски, ответить. Например: «Является ли число 7999 простым?» или: «Можно ли сцепить 7 резиновых колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с тремя другими?»

Как только один из капитанов даёт ответ, конкурс заканчивается: если ответ правильный, то команда, давшая его, побеждает, если ответ неверен, автоматически побеждает в конкурсе другая команда.

Победившая команда определяет, какая из команд первой будет «вызывать» соперников, после чего должен последовать вызов на одну из задач списка.

Вызванная команда может принять вызов и выставить одного из своих членов как отвечающего решение этой задачи — тогда вызвавшая команда посылает к доске оппонента, который должен проверять решение. Если же задача не решена, то капитан сообщает об отказе рассказывать решение. В этом случае происходит так называемая «проверка корректности вызова». Решение должна рассказывать вызвавшая команда, вызванная же команда выставляет оппонента.

Во всех случаях, кроме одного — когда при проверке корректности вызвавшая команда не смогла изложить правильное решение (а на матбое за отсутствием ошибок следит не только оппонент, но и жюри), — право на вызов переходит к другой команде. Если же вызов оказался «некорректным», команда, сделавшая его, наказывается определённым штрафом и должна повторить вызов (уже, конечно, на другую задачу).

После того как обсуждение задачи закончилось, жюри распределяет очки исходя из того, что каждая задача стоит 12 очков. Какую-то долю очков может получить и оппонент, даже если решение отвечающего было верным; оппонент мог найти пробелы в решении, которые затем были исправлены отвечающим. В том случае, когда обнаруженная оппонентом ошибка не была исправлена за некоторое ограниченное время (например, за 1 минуту) и была признана жюри достаточно серьёзной, ответ прерывается, и жюри может заслушать оппонента, после чего принять решение о распределении очков.

Если одна из команд отказывается от права на вызов, то другая команда может рассказать решения всех ещё не разобранных задач, решённых этой командой (всё это происходит с участием оппонента).

Существует также ещё масса мелких правил и ограничений, которые «наслоились» за 25 лет существования матбоёв, однако основная схема уже изложена выше. Среди таких правил есть, например, следующие.

1. Штраф за «некорректный» вызов равен 6 очкам.
2. Каждый из участников боя может выходить к доске (не считая конкурса капитанов) не более X раз — значение X сообщается командам при выдаче задач. Обычно $X = 2$ или 3.
3. Вести переговоры с жюри может лишь капитан или его временный заместитель.

Последний и главный закон матбоя: в любой ситуации последнее слово — за жюри; оно является одновременно и высшим законодательным органом, и верховным судом матбоя.

Более подробные варианты правил матбоя вы можете прочитать в журнале «Квант» № 10 за 1972 год или в журнале «Математика в школе» № 4 за 1990 год.

Для правильного ведения матбоя необходим определённый опыт и знание стандартных приёмов — так, например, чрезвычайно стандартным (как в шахматах ходы e2–e4, d2–d4) является вызов противника на самую трудную из решённых самой командой задач. Полезным

является проведение лёгких тренировочных матбоёв. Стоит упомянуть, что популярность матбоёв в Ленинграде иногда доходила до того, что проводились «матбойные» первенства некоторых физико-математических школ между классами — но только в старших параллелях. Неоднократно проводились обычные и тройные матбои между командами 30-й, 45-й и 239-й школ.

Здесь мы приведём пример списка задач и протокола матбоя (он проходил 20 апреля 1984 года между кружками 6 класса Юношеской математической школы и Ленинградского дворца пионеров).

1. «Крокодилом» называется фигура, ход которой на бесконечной клетчатой доске заключается в сдвиге на одну клетку, а затем на n клеток перпендикулярно направлению первоначального сдвига (если $n=2$, то это просто шахматный конь). При каких n «крокодил» может дойти от любой клетки доски до любой другой?

2. Числа p и 2^p+p^2 простые. Найдите p.

3. Может ли куб натурального числа оканчиваться на 1985 единиц?

4. Докажите, что из диагоналей любого выпуклого пятиугольника можно выбрать три такие, из которых можно составить треугольник.

5. В таблице $n\times(n+1)$ расставлены целые числа. Докажите, что можно вычеркнуть несколько столбцов (но не все) так, что после этого суммы чисел во всех строчках будут чётны.

6. Сколькими способами можно представить число 15 в виде суммы нескольких натуральных чисел, если способы, отличающиеся перестановкой слагаемых, считать различными?

7. Точка A называется «почти центром симметрии» множества M на плоскости, состоящего более чем из одной точки, если из множества M можно удалить одну точку так, что точка A будет центром симметрии получившегося множества. Сколько может быть «почти центров симметрии» у конечного множества точек на плоскости?

8. На окружности расставлено 30 чисел так, что каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке, а сумма всех равна 1. Какие числа и как расставлены?

* * *

Конкурс капитанов. Просто ли число 227? (Выигран командой ЛДП.)

Жюри		Ю М Ш		Л Д П	
	0	Иванов	—6→	Доголяцкий	12
18	0		|←5—	некорр. вызов	—6
	12	Демченко	←8—	Гуревич	0
	12	Выскубов	—4→|	Пчелинцев	0
	12	Иванов	←2—	Рогинская	0
	12	Виро	—3→|	Доголяцкий	0
	12	Новик	←1—	Гуревич	0
18	—6	некорр. вызов	—7→|		0

Счёт: 54:6 (36).

Примечание 1. Символ —6→ означает вызов на шестую задачу. Если же стрелка оканчивается вертикальной чертой: —3→|, то это означает отказ вызываемой команды.

Примечание 2. Из протокола видно, что выигравшая команда совершила грубейшую ошибку. Какую именно?

§ 3. Математическая драка

В отличие от матбоя, это личное соревнование. Его рекомендуется проводить в достаточно однородном по силе кружке (факультативе).

Участникам предлагается несколько задач, условия которых выписываются на доску; при этом рядом с каждой задачей выписывается её цена в очках. Как только кто-то хочет рассказать решение одной из задач, он поднимает руку и называет номер задачи. Если решение оказывается верным, рассказчик получает соответствующее количество очков. В противном случае цена задачи немного увеличивается — размер этого изменения определяется преподавателем — и такое же количество очков вычитается из очков неудачника.

Матдрака рискует затянуться на неопределённое время, если какие-то задачи окажутся чрезмерно сложными; преподаватель должен позаботиться о том, чтобы этого не случилось.

Обязательно надо обратить внимание участников на необходимость тщательной проверки своих решений — иначе школьник вполне может закончить матдраку с отрицательным количеством очков. Это должно приучить ребят к самоконтролю.

В завершение этого параграфа приведём пример матдраки.

9. Какое максимальное число шашечных дамок можно поставить на чёрных полях шахматной доски так, чтобы любую дамку могла бы побить какая-то другая? (5 очков)

10. Треугольник ABC остроугольный. Из середин сторон на все стороны треугольника опущены перпендикуляры. Докажите, что площадь получившегося шестиугольника равна половине площади треугольника ABC. (6 очков)

11. Найдите два таких трёхзначных числа x и y, что сумма всех остальных трёхзначных чисел равна $600x$. (6 очков)

12. С помощью угольника (умеет проводить прямую через две точки и восстанавливать перпендикуляр к прямой в данной точке этой прямой) опустите перпендикуляр из данной точки на данную прямую. (10 очков)

13. На танцплощадке собралось 10 юношей и 10 девушек. Известно, что для любой группы из k юношей количество девушек, знакомых хотя бы с одним юношей из этой группы, не меньше k. Докажите, что все присутствующие на танцах могут разбиться на 10 пар так, чтобы каждый юноша танцевал со знакомой ему девушкой. (20 очков)

Итоги по задачам:
(9): 5 — Петькин
(10): 6 → 7 — Федькин
(11): 6 → 9 — Редькин
(12): 10 → 15 → 18 — Сидоров
(13): 20 → 27 — Петькин

Результаты участников:
Петькин — (+24)
Федькин — (+7)
Редькин — (+9)
Сидоров — (+12)
Мошкин — (−5)

Упражнение. Попробуйте восстановить ход матдраки. После номера каждой задачи записано, как росла её цена и кто её наконец решил.

Примечание. Задачи из списка можно предлагать и по одной, последовательно.

§ 4. Олимпиада-марафон

Это устная олимпиада кружка, для проведения которой преподавателю необходимо иметь одного-двух помощников и длинный список достаточно простых задач. Прежде чем описать методику проведения марафона, скажем несколько слов о системе устной олимпиады, которая широко распространена в Санкт-Петербурге, но не слишком известна за его пределами.

Все решения отвечаются устно одному из проверяющих и не обязательно должны быть записаны. Результат ответа ставится в протокол:

«плюс» (+) или «минус» (−). Попыток по каждой задаче три, после третьего неверного решения участник олимпиады теряет право на дальнейшие попытки рассказывать решение этой задачи. В протоколе, как следствие, могут возникать такие оценки, как «два минуса» (=) или «плюс с двумя минусами» $\left(\overset{+}{=}\right)$.

Для удобства проведения массовой олимпиады устная олимпиада обычно (как это делается, например, при проведении олимпиады в нашем городе) делится на два этапа: «довыводной» и «вывод». На первом этапе все участники решают 4 довыводных задачи, и лишь те, кто решил две (или три) из них, переводятся в «вывод», где они получают полный вариант олимпиады, состоящий из 6 (или 7) задач: 4 общих и 2–3 выводных.

Марафон есть продукт абсолютизации выводной системы. Преподаватель должен заранее заготовить список из 10–20 задач, первые 5–10 из которых должны быть очень лёгкими и достаточно стандартными. Сложность задач от начала к концу списка должна нарастать, но очень медленно.

В начале марафона все участники получают задачи 1 и 2 из списка. После этого они решают и рассказывают свои решения преподавателю или его помощникам. В том случае, если задача решена правильно, проверяющий ставит плюс в протокол и даёт участнику следующую задачу по списку. Например, если у школьника были задачи 3 и 7, то после решения любой из них он получит задачу 8.

Таким образом, в любой момент олимпиады её участник имеет перед собой ровно две ещё не решённые им задачи — следующих задач из списка он пока не знает.

Опыт проведения олимпиад-марафонов показывает, что за то же время участники успевают решить большее число задач, лучше сосредотачиваются; относятся они к подобным олимпиадам с бóльшим интересом, чем к уже известным формам математических соревнований.

Для преподавателей. Используя задачи из этой книги, можно составить несколько очень простых марафонов, а также и марафоны большей сложности. Мы рекомендуем вам для составления первой половины марафона, взяв по несколько простых задач по интересующим вас темам — «Делимость», «Геометрия», «Принцип Дирихле», «Неравенства» и т. д., — перемешать их почти в произвольном порядке. Во второй половине марафона сложность надо постепенно увеличить.

Предостережение. Самая неприятная ошибка, которую можно допустить при подготовке марафона, — это недооценить сложность первых

задач олимпиады. Если одна из первых 5–6 задач не будет решена большинством участников, марафон провалится. Постарайтесь, чтобы этого не случилось, иначе у ваших подопечных останутся не слишком приятные воспоминания от олимпиады, которая закончилась, едва успев начаться.

§ 5. Математический хоккей

Эту увлекательную математическую игру лучше всего проводить в кружках 6–8 классов. В ней принимают участие две команды — по 5 школьников в каждой. В каждой команде должен быть один «вратарь», два «защитника» и два «нападающих».

Преподавателю нужно иметь большой список простых задач, в основном вычислительного характера, на решение которых у школьников не должно уходить более пяти минут.

В начале игры шайба (воображаемая; впрочем, можно изобразить хоккейное поле и шайбу на доске) находится в центре. Вбрасывание состоит в том, что «полевым игрокам» обеих команд предлагается первая задача списка. Побеждает команда *A*, быстрее нашедшая правильное решение, — и шайба перемещается в зону проигравшей команды *B*. Тут уже противостоят друг другу нападающие команды *A* и защитники команды *B* — их спор решается при помощи второй задачи. В зависимости от того, кто побеждает, игра перемещается обратно в центр или на вратарский «пятачок», где против нападающих команды *A* играет лишь голкипер команды *B*. Если и он терпит поражение (при решении очередной задачи из списка), это означает, что счёт в матче открыт — 1:0 в пользу команды *A*, и игра начинается заново. В противном случае шайба возвращается на вбрасывание в зоне команды *B* и т. д.

Можно считать, что игровое поле состоит из пяти частей, как это показано на рис. 114, и шайба в любой момент игры находится в одной из них. В зависимости от исхода каждого игрового эпизода она перемещается либо влево, либо вправо в соседнюю часть.

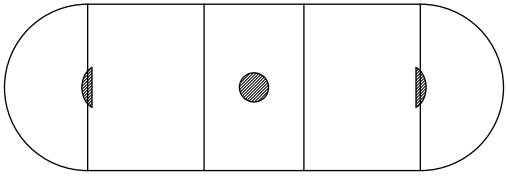


Рис. 114

Советы. 1. Если вы хотите сделать игру более динамичной, центральную часть поля можно удалить, а вбрасывание в центре разыгрывать при помощи монетки.

2. Если в вашем кружке много учеников, то его можно разбить на три команды с игрой «на вылет». Отдыхающая команда будет играть роль зрителей.

3. Разбивать кружок на команды надо очень аккуратно. Постарайтесь добиться примерного равенства силы команд (это же касается и других командных математических соревнований).

§ 6. Математический аукцион

Это математическое соревнование вполне заслуживает того, чтобы его назвали азартной игрой. Опыт показывает, что школьники с большим энтузиазмом участвуют в подобных состязаниях. Аукцион можно проводить и как личное, и как командное соревнование.

Суть его в следующем. Преподавателем предлагается специальная исследовательская задача (для проведения аукциона их должно быть не менее пяти-шести), полное решение которой может быть ему и неизвестно. Специфика задачи должна заключаться в том, что задача обязана допускать промежуточные ответы, постепенное достижение цели. Приведём несколько примеров, которые, мы надеемся, прояснят вышеизложенное.

14. Какое максимальное количество слонов можно поставить на доске 8×8 (варианты: коней, ладей; доска 10×10 и т. п.) так, чтобы никакие две фигуры не били друг друга?

15. Какое максимальное количество фигурок, изображённых на рис. 115, можно расположить без наложения внутри квадрата 10×10?

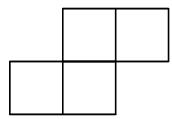


Рис. 115

16. Найдите как можно больше решений ребуса

$$\text{ТРОС} + \text{СТАР} = \text{КРУПА}.$$

17. Используя цифры 1, 9, 8, 4 в указанном порядке и стандартные математические операции, запишите числа от 1 до возможно большего натурального числа. Пример: $5 = (1 + 9) : (8 : 4)$.

18. Запишите число 1991, используя только четвёрки и обойдясь при этом как можно меньшим числом цифр. Количество арифметических операций, возведений в степень, извлечений корня и т. п. не ограничивается.

19. Проведите на плоскости 7 (варианты: 8, 9, 10) прямых так, чтобы среди частей, на которые разобьётся плоскость, оказалось как можно больше треугольников.

20. На доске 10×10 расставьте как можно меньшее количество «магарадж» (это «супершахматная» фигура, которая ходит и как ферзь, и как конь) так, чтобы вся доска оказалась под боем.

Важное примечание. Обратите внимание на то, что формулировки предложенных только что задач можно варьировать, заменяя в них числа, фигурки и т. д.

После того как задача предложена, некоторое время (скажем, полчаса) отводится на её решение. Вообще говоря, можно предложить сразу несколько задач — так лучше поступать при командном аукционе.

Затем каждая команда получает равное количество условных денежных единиц: пиастров или, скажем, слоников. Например, исходный капитал может составлять 1000 пиастров.

Наконец начинается сам аукцион, на котором поочерёдно продаются задачи из объявленного списка. Роль ведущего исполняет преподаватель. Он объявляет о продаже задачи и называет её цену (допустим, 180 пиастров) — это та сумма, которую получит счастливый победитель. После объявления цены та команда, которая в аукционной борьбе покупает задачу, рассказывает свои результаты, оценки.

Пример. Команда *A* платит за право рассказать задачу 17 сумму в 132 пиастра и объявляет о том, что она умеет представлять в нужном виде все числа от 1 до 62. При демонстрации решения выясняется, что в представлении числа 51 допущена ошибка. Таким образом, результат команды *A* — 50.

Затем задача опять ставится на продажу, но на этот раз победившая команда может рассказать лишь то решение, которое улучшает уже имеющийся результат.

Продолжение примера. Команда B платит за право дополнить решение задачи 17 сумму в 25 пиастров и демонстрирует представление чисел 51–68 (естественно, числа 1–50 показывать уже не нужно).

Затем задача вновь ставится на продажу и т. д., до тех пор пока команды не откажутся от торговли. После этого команда, рассказавшая наилучшее решение, получает цену задачи. В том случае, если команда-победитель хочет рассказать полное решение, т. е. предста-

вить доказательство того, что её решение неулучшаемо, доказательство должно быть выслушано. Если оно верно, команда получает ещё и призовой фонд задачи (например, ещё 50 пиастров).

Продолжение примера. Команда C покупает право рассказать улучшение решения команды B за 6 пиастров и излагает неверное представление числа 69. Конечно же, уплаченные ею пиастры пропадают впустую. После этого аукционная продажа задачи 17 прекратилась.

Результат: Команда A потеряла 132 пиастра.
Команда B приобрела 155 пиастров ($180 - 25 = 155$).
Команда C потеряла 6 пиастров.

* * *

Теперь ставится на продажу следующая задача, и аукцион продолжается.

Приведём в заключение ещё пять исследовательских задач, пригодных для использования на аукционе.

21. На деревянную линейку нанесите как можно меньшее количество меток так, чтобы любое расстояние, выражающееся целым числом сантиметров от 1 до 15 (варианты: от 1 до 20, 30), можно было отложить при помощи двух каких-то меток.

22. Каким наименьшим числом разрезов можно рассечь куб $5 \times 5 \times 5$ на 125 единичных кубиков, если куски можно класть друг на друга?

23. Есть 10 кирпичей длиной 30 см каждый. Разрешается складывать их в устойчивую стопку; при этом кирпичи не обязаны лежать точно над предыдущими. Сколь сильно может быть сдвинут самый верхний кирпич относительно самого нижнего? (Нельзя класть более одного кирпича на каждом уровне; стопка устойчива, если для любого кирпича K центр тяжести системы, образованной всеми кирпичами выше K, находится над K.)

24. Разрежьте квадрат на наименьшее возможное число остроугольных треугольников.

25. Найдите как можно больше решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах, не превосходящих 50 (варианты: 40, 100).

Ответы, указания, решения

Нулевой цикл

1. Через 59 секунд.

2. Три копейки.

3. Аня и Ваня платят Сане 15 копеек, получая от него по 10 копеек сдачи. После этого он платит 15 копеек в кассу.

4. Поскольку последняя страница должна иметь номер другой, нежели начальная, чётности, её номер 536. Ответ: 172 страницы.

5. Разбиваем сначала гвозди пополам — на две группы по 12 кг, после чего одну из этих групп делим пополам, а затем ещё раз пополам. Полученные 3 кг гвоздей откладываем и получаем 9 кг в остатке.

6. Червяк окажется вверху к вечеру 71-го дня.

7. Воскресенье.

8. Максимальное число — это 553451234512345.

9. Да, может, если день рождения Пети — 31 декабря, а указанную фразу он произносит 1 января.

10. Нет, не прав.

11. Всего нарисовано 12 кружков: пять на одной стороне листка и семь — на другой.

12. Да, может, если профессор — женщина.

13. Третья черепаха лжёт.

14. Он рассуждал так: «Если у меня лицо не испачкано, то другой мудрец, увидев, что третий над чем-то смеётся, понял бы, что его лицо испачкано, и перестал бы смеяться. Однако он смеётся, следовательно, у меня лицо тоже испачкано».

15. Конечно же, чая в молоке столько же, сколько молока в чае.

16. См., например, рис. 116.

17. Ответ: 95343.

18. Ответ единственный:

$$51286 + 1582 = 52868.$$

19. 127 монет надо разложить так:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64.$$

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Рис. 116

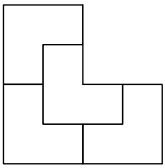


Рис. 117

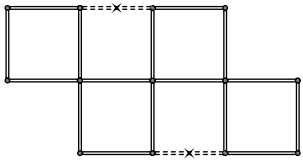


Рис. 118

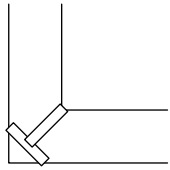


Рис. 119

20. См. рис. 117.

21. См. рис. 118.

22. См. рис. 119.

23. Три карандаша кладутся так, как указано на рис. 120. Ещё три, уложенные аналогично, но «закрученные» в противоположном направлении, кладутся на них сверху.

24. См. рис. 121.

25. Ответ: 4. Уберите, например, монеты, указанные на рис. 122.

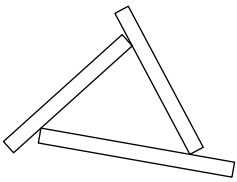


Рис. 120

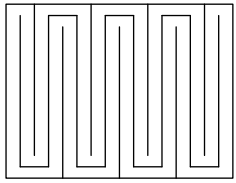


Рис. 121

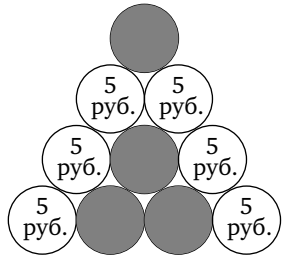


Рис. 122

Чётность

2. Поскольку при каждом ходе меняется цвет поля, на котором стоит конь, имеет место чередование цветов: белого и чёрного.

3. Ответ: нет, не может. Так как конь должен сделать 63 хода, последним (нечётным) ходом он встанет на поле другой чётности, нежели a1; но h8 имеет тот же цвет.

4. Ответ: нет, не может. Если мы обойдём контур ломаной, переходя из каждой вершины в следующую, то каждый раз, пересекая прямую, будем оказываться в другой полуплоскости (прямая делит плоскость на две половины). Таким образом, имеет место чередование, и, значит, количество вершин должно быть чётным.

5. Ответ: нет, не могут. Будем называть расположение шайб правильным, если, обходя вершины треугольника *ABC* именно в порядке

A–B–C, мы получим обход по часовой стрелке, и неправильным в противном случае. Легко видеть, что при каждом ударе тип расположения меняется.

6. Ответ: четыре. Если у кого-то из Катиных друзей соседи того же пола, то очевидно, что все стоящие в кругу — одного пола. Значит, мальчики и девочки чередуются, и, следовательно, девочек столько же, сколько и мальчиков.

8. Нельзя, так как общее количество клеток (25) не делится на два, а каждая доминошка покрывает две клетки.

9. Если ось симметрии не проходит через вершину, то все вершины должны разбиваться на пары симметричных, что невозможно, так как их количество нечётно.

10. Поскольку внутри цепи все числа встречаются парами, а общее количество половинок домино с пятёрками — восемь, на другом конце цепи тоже стоит пятёрка.

11. Ответ: нет, нельзя. Докажем это от противного. Если такая цепь имеется, то одно из чисел 1, 2, 3 не встречается на концах. Пусть это число 3. Но так как внутри цепи троек чётное количество, а всего их осталось после выкидывания костей с пустышками семь, получаем противоречие.

12. Ответ: нет, нельзя. Если выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то его стороны обязательно разбиваются на пары параллельных.

13. Поскольку в противном случае шашки разбиваются на пары симметричных, на диагонали обязательно должно стоять нечётное число шашек.

14. Как мы знаем из решения предыдущей задачи, на главной диагонали стоит нечётное количество шашек, с расстановкой симметричной относительно другой диагонали (т. е. относительно центра).

15. Поскольку единиц 25 штук, на главной диагонали должна быть хотя бы одна единица (см. решение задачи 13). Аналогично на главной диагонали есть двойка, тройка и т. д.

17. Ответ: нет, не могло. На каждом листе сумма номеров страниц нечётна, а сумма 25 нечётных чисел нечётна.

18. Среди этих чисел чётное число «минус единиц», а для того, чтобы сумма равнялась нулю, их должно быть ровно 11.

19. Ответ: нет, нельзя. Среди этих чисел одно (2) чётное, а остальные нечётные. Поэтому в той строке, где стоит двойка, сумма чисел нечётна, а в других чётна.

20. Ответ: нет, нельзя. В самом деле, сумма чисел от 1 до 10 равна 55, и, изменяя в ней знаки, мы меняем всё выражение на чётное число.

21. Утверждение доказывается так же, как и в задаче 20, так как сумма $1 + 2 + \ldots + 1985$ нечётна.

22. Ответ: нет, не может. Проверьте, что при указанных операциях чётность суммы всех написанных на доске чисел не меняется.

23. Ответ: нельзя. Каждая доминошка покрывает одно чёрное и одно белое поле, а при выкидывании полей a1 и h8 чёрных полей остаётся на 2 меньше, чем белых.

24. Разберите два случая: 1) сумма первой и последней цифр числа меньше 10; 2) сумма первой и последней цифр числа не меньше 10. Если допустить, что все цифры суммы нечётны, то в первом случае не должно быть ни одного переноса в разрядах (что, очевидно, приводит к противоречию), а во втором случае наличие переноса при движении справа налево или слева направо чередуется с отсутствием переноса, и в результате мы получим, что цифра суммы в девятом разряде обязательно чётна.

25. Ответ: нет, не может. Так как на каждом дежурстве, в котором участвует данный человек, он дежурит с двумя другими, всех остальных можно разбить на пары. Однако 99 — нечётное число.

26. Для любой точки X, лежащей вне AB, имеем $AX - BX = \pm AB$. Если предположить, что суммы расстояний равны, то мы получим, что выражение $\pm AB \pm AB \pm \ldots \pm AB$, в котором участвует 45 слагаемых, равно нулю. Но это невозможно.

27. Ясно, что комбинация из девяти единиц раньше, чем девять нулей, получиться не может. Если же получилось девять нулей, то на предыдущем ходу нули и единицы должны были чередоваться, что невозможно, так как их всего нечётное количество.

28. Проведём наше доказательство от противного. Занумеруем всех сидящих за столом по порядку начиная с какого-то места. Если на k-м месте сидит мальчик, то ясно, что на $(k-2)$-м и на $(k+2)$-м местах сидят девочки. Но поскольку мальчиков и девочек поровну, для любой девочки, сидящей на n-м месте, также верно, что на $(n-2)$-м и на $(n+2)$-м местах сидят мальчики. Если мы теперь рассмотрим только тех 25 человек, которые сидят на «чётных» местах, то получим, что среди них мальчики и девочки чередуются, если обходить стол в каком-то направлении. Но 25 — нечётное число.

29. Ясно, что количество a участков, на которых улитка ползла вверх или вниз, равно количеству участков, на которых она ползла вправо или влево. Осталось только заметить, что a чётно.

30. Ответ; нет, не могут. Обозначим кузнечиков A, B и C. Назовём расстановки кузнечиков ABC, BCA и CAB (слева направо) правильными, а ACB, BAC и CBA — неправильными. Легко видеть, что при любом прыжке тип расстановки меняется.

31. Нужно отложить данную монету в сторону, а затем разделить остальные 100 монет на две кучки по 50 монет и сравнить веса этих кучек. Если они отличаются на чётное число грамм, то интересующая нас монета настоящая. Если же разность весов нечётна, то монета фальшивая.

32. Ответ; нет, нельзя. В противном случае все цифры в ряду стояли бы на местах одной и той же чётности.

Комбинаторика–1

28. $5 \cdot 4 = 20$. **29.** $2 \cdot 3 = 6$. **30.** $7 \cdot 5 \cdot 2 = 70$.
31. $20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 500$. **32.** $5^6 + 4 \cdot 5^5$. **33.** 3^6. **34.** $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$.
35. $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 325$. **36.** $8!$. **37.** $N!$.
38. $\dfrac{18 \cdot 17}{2} = 153$.
39. а) $\dfrac{64 \cdot 49}{2} = 1568$;

б) $\dfrac{4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55}{2} = 1806$;

в) $\dfrac{28 \cdot 56 + 20 \cdot 54 + 12 \cdot 52 + 4 \cdot 50}{2} = 1736$;

г) $\dfrac{4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 16 \cdot 55}{2} = 1848$;

д) $\dfrac{28 \cdot 42 + 20 \cdot 40 + 12 \cdot 38 + 4 \cdot 36}{2} = 1288$.

40. $\dfrac{9!}{2!3!4!}$. **41.** $\dfrac{7!}{1!2!4!}$. **42.** $\dfrac{8!}{2!2!2!}$. **43.** $1 + \dfrac{6!}{5!1!} + \dfrac{7!}{5!2!} + \dfrac{8!}{5!3!} = 84$.
44. $9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9!$
45. $8 \cdot 9^6 < 9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$, и потому чисел с единицей больше.
46. $6^3 - 5^3$. **47.** $13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$. **48.** $9 \cdot 10^7 \cdot 5$.

Делимость и остатки

1. а) 4; б) 6; в) 9; г) $(n+1)(m+1)$.

3. Среди этих чисел есть число, кратное 3, есть число, кратное 5, и есть два чётных числа, одно из которых делится на 4.

4. а) $p-1$; б) p^2-p.

5. Поскольку $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, получаем, что $n = 11$.

6. Нет, поскольку 24! оканчивается на 4 нуля, а 25! — уже на 6 нулей.

7. Ответ: 24. Это степень, в которой входит число 5 в разложение числа 100! на простые множители.

8. *Указание.* Если d — делитель числа n, то $\frac{n}{d}$ также делитель числа n.

9. Число в левой части не делится на 11, а в правой части — делится.

11. $65(a+b)=65a+65b=65a+56a=121a$. Так как 65 и 121 взаимно просты, получаем, что $a+b$ делится на 121. Поскольку $121=11^2$ — составное число, получаем, что и $a+b$ — составное число.

12. а) $x=16$, $y=15$; б) $x=152$, $y=151$ или $x=52$, $y=49$.

13. $x(x^2+x+1)=3$. Отсюда следует, что либо $x=\pm1$, либо $x=\pm3$. Ответ: $x=1$.

14. *Указание.* Проверьте, что любое простое число p входит в одной и той же степени в обе части равенства.

15. а) 0; б) 1, так как 9 даёт остаток 1 при делении на 8.

17. Переберите остатки от деления на 5.

18. Переберите остатки от деления на 3.

19. Переберите остатки от деления на 9.

21. Докажите, что указанные числа делятся и на 3, и на 8.

22. Если ни x, ни y не делятся на 3, то x^2 и y^2 дают остаток 1 от деления на 3. Таким образом, их сумма имеет остаток 2 от деления на 3. Но z^2 не может иметь такого остатка.

23. Проверьте, что и a, и b делятся и на 3, и на 7.

24. Проверьте, что числа x^3 и x имеют одинаковые остатки от деления на 6.

25. Если d нечётно, то среди чисел p и q есть чётное, что невозможно. Если d не делится на 3, то среди чисел p, q и r есть делящееся на 3, что тоже невозможно.

26. Выясните возможные остатки квадратов при делении на 8.

27. Возможные остатки квадратов от деления на 9: 0, 1, 4, 7. Проверьте, что если сумма трёх из них делится на 9, то среди них есть два одинаковых.

30. 7. **31.** 1. **32.** 6. **33.** 3.

35. Одно из этих чисел делится на 3. а) $p=3$; б) $p=3$.

36. $p=3$. **37.** Докажите, что $p=3$.

38. Рассмотрите остатки по модулю 3.

39, 40. Проверьте, что остаток квадрата нечётного числа от деления на 4 равен 1, а остаток квадрата чётного числа — 0.

41. Ответ: $p=5$. Рассмотрите остатки при делении на 5.

42. Это число даёт остаток 7 от деления на 9.

43. Выясните, какой остаток может давать число $a^3 + b^3 + 4$ от деления на 9.

44. Выясните, какой остаток может давать число $6n^3 + 3$ от деления на 7.

45. Если ни одно из чисел x, y не делится на 3, то z^2 даёт остаток 2 при делении на 3, что невозможно. Заметьте теперь, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1, квадрат чётного числа, не делящегося на 4, — остаток 4, квадрат числа, делящегося на 4, — остаток 0. Докажите, что либо x и y оба чётны, либо среди них есть число, кратное 4.

46. Указания: а) $4+7a=4(a+1)+3a$; б) $a+b=(2+a)-(35-b)+33$.

47. 0.

48. Докажите, что любые два числа из этих семи дают одинаковый остаток от деления на 5. Для этого рассмотрите две шестёрки: одну — не содержащую первое из них, вторую — не содержащую второе.

49. Обозначим первое из этих чисел через a. Получим

$$\begin{aligned} a + (a+2) + (a+4) + \ldots + (a+2(n-1)) = \\ = na + 2(1+2+3+\ldots+(n-1)) = \\ = na + n(n-1) = n(a+n-1). \end{aligned}$$

50. Заметим, что это число, увеличенное на 1, делится на 2, 3, 4, 5, 6. Ответ: 59.

51. Если n — составное число ($n > 4$), то $(n-1)!$ делится на n.

55. $\text{НОД}(30n+2, 12n+1) = \text{НОД}(12n+1, 6n) = \text{НОД}(6n, 1) = 1$.

56. Ответ: $2^{20} - 1$.

57. Ответ: 111 … 11 (20 единиц).

Принцип Дирихле

3. Остатки по модулю 11 — «клетки», числа — «кролики».

4. Постройте миллион клеток с номерами от 0 до 999999 и рассадите там людей, поместив каждого ленинградца в клетку, номер которой равен количеству волос на его голове.

6. Так как перевезено всего $10m + 1$ футболистов, рассадив их по клеткам-командам, получаем, что в какой-то клетке сидит 11 футболистов.

8. Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Осталось заметить, что если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых.

9. Примените то же дополнительное соображение, что и в задаче 8.

11. Из условий следует, что найдутся 7 школьников, решивших $35-6=29$ задач. Так как $29=4\cdot 7+1$, найдётся школьник, решивший не менее пяти задач.

12. Ответ: 32 короля. Посмотрите на подсказку к задаче 10а.

13. Разбейте паутину на 4 «клетки», в каждой из которых не может находиться более одного паука.

14. Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины большого треугольника.

16. Если бы каждый из рабочих мог купить магнитофон, то у них в сумме было бы не менее $5\cdot 320=1600$ рублей.

18. Покрасим всю сушу в синий цвет, а все точки, диаметрально противоположные суше, — в красный. Тогда обязательно есть точка, которая покрашена в оба цвета. В ней и надо рыть туннель.

19. Рассмотрите 1988 степеней и их остатки по модулю 1987.

20. Квадраты при делении на 100 могут давать лишь 51 остаток, так как остатки x и $100-x$ при возведении в квадрат дают один и тот же остаток.

22. Если 3^m и 3^n — степени тройки, дающие один и тот же остаток при делении на 1000, то $3^m-3^n=3^n(3^{m-n}-1)$ делится на 1000 (мы считаем для определённости, что $m>n$).

23. Эти суммы могут принимать лишь 7 разных значений: от -3 до 3.

24. Разобьём всех людей на 50 пар так, что в каждую пару входят два человека, сидящие друг напротив друга. Ясно, что в одной из этих пар-«клеток» оба человека — мужчины.

25. Если это не так, то очевидно, что мальчики собрали не менее чем $0+1+2+\ldots+14=105$ орехов — противоречие.

26. Произведение чисел во всех группах равно $9!=362880$, что больше числа $71^3=357911$.

27. а) Поскольку от любой клетки до любой другой можно добраться, не более 18 раз сдвинувшись в соседнюю клетку, все числа находятся между числами a и $a+90$, где a — минимальное из всех расставленных чисел. Значит, количество различных чисел не превосходит 91.

б) Точно так же получаем, что все числа должны находиться в промежутке от a до $a+80$. Если такая расстановка существует, рассмотрите клетки, соседние с числом a.

28. У данного человека среди остальных пяти есть либо не менее трёх знакомых, либо не менее трёх незнакомых ему. Разберём, на-

пример, первый случай. Среди этих трёх людей есть либо двое знакомых — тогда они вместе с выбранным нами исходно человеком образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы.

29. Рассмотрите координаты этих точек и их остатки при делении на 2.

30. В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например левый, повторится по крайней мере дважды, скажем, для размеров 41 и 42. Но так как количество левых сапог в этих размерах суммарно не меньше 100 (почему?), мы имеем не менее 100 годных пар обуви этих размеров.

31. Докажите, что в одной из групп разность между числом согласных и числом гласных не больше 1.

32. Рассмотрите 10 сумм: x_1, $x_1 + x_2$, …, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}$ и их остатки при делении на 10.

33. Разбейте числа от 1 до 20 на 10 наборов, в каждом из которых в любой паре чисел одно делится на другое: $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$, $\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14\}$, $\{9, 18\}$.

34. Занумеруем кружки числами от 1 до 5 и вместо каждого школьника будем рассматривать тот набор кружков — подмножество множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, — который состоит из посещаемых им кружков. Осталось разбить 32 подмножества указанного множества на 10 наборов так, чтобы в каждом из наборов из любых двух множеств этого набора одно содержалось в другом. В качестве таких наборов рассмотрим следующие:

$$[\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}],$$
$$[\{2\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}],$$
$$[\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 4, 5\}],$$
$$[\{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}],$$
$$[\{5\}, \{1, 5\}, \{1, 3, 5\}], \quad [\{2, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}], \quad [\{3, 4\}, \{3, 4, 5\}],$$
$$[\{3, 5\}, \{2, 3, 5\}], \quad [\{4, 5\}, \{1, 4, 5\}], \quad [\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}].$$

Графы

3. Да, такой обход возможен.

4. Нет, нельзя.

6. Общее число дорог равно $\frac{100 \cdot 4}{2} = 200$.

8. Нельзя. Примените теорему о числе нечётных вершин.

9. Нет, не может. В противном случае получился бы граф соседства баронств с нечётным количеством нечётных вершин.

10. Если в государстве k городов, то дорог — $\frac{3k}{2}$. Это число не может быть равно 100.

11. Да, верно, иначе нарушается теорема о числе нечётных вершин.

12. Это в точности теорема о нечётных вершинах.

13. Нет, нельзя. Примените теорему к графу, вершины которого — данные отрезки, а ребро соединяет две вершины тогда, когда два соответствующих отрезка пересекаются.

15. Решение этой задачи совершенно аналогично решению задачи 14.

17. Если закрыта дорога AB, то нам достаточно доказать, что и после этого можно добраться из A в B. Если это не так, то в компоненте связности, содержащей A, все вершины, кроме A, чётные. Но наличие ровно одной нечётной вершины противоречит теореме о числе нечётных вершин.

19. Нет, нельзя. У этого графа слишком много нечётных вершин.

20. а) Шесть; б) пять; в) четыре.

21. Нет, нельзя.

22. а) Если это возможно, то ясно, что проволока идёт по рёбрам куба без наложения, т. е. мы как бы нарисовали каркас куба, не отрывая карандаша от бумаги. Но это невозможно, так как у куба восемь нечётных вершин. б) Поскольку нечётных вершин восемь, таких кусков нужно не менее четырёх.

Неравенство треугольника

1. Это немедленно следует из неравенства треугольника.

2. Ответ: 4.

3. Обозначим длины сторон треугольника через a, b, c. Так как $b+c>a$, получаем, что $a+b+c>2a$.

4. Первый самолёт прилетит раньше.

7. Сложите неравенства треугольника $AC+OC>OA$ и $OB+OD>BD$. Так как $AC=BD$, вычитая эти значения из каждой части неравенства, получаем требуемое.

8. Пусть диагонали пересекаются в точке O. Требуемые неравенства легко выводятся из неравенств треугольника для треугольников OAB, OBC, OCD, ODA и для треугольников ABC, BCD, CDA и DAB.

9. Решение аналогично решению задачи 8.

10. Продолжите отрезок, соединяющий эти точки, в обе стороны до пересечения с контуром треугольника.

12. Решение изображено на рисунке к задаче 13.

13. Воспользуйтесь тем, что $AD = BD$, $AE = EC$, и неравенством $AD + AE > DE$.

15. Ответ: ей следует ползти через середину ребра, разделяющего две соседние грани, содержащие точки X и Y.

16. *Указание.* Рассмотрите две одинаковые развёртки боковой поверхности стакана, одна из которых будет представлять внутреннюю, а другая — внешнюю поверхность стакана. Склейте их по общей границе и отметьте две данные точки.

17. Ответ: он должен проползти по средним линиям двух соседних граней, на противоположных рёбрах которых находятся паук и цель его пути.

18. Продолжите отрезок AO до пересечения со стороной BC в точке D. Сложите теперь неравенства треугольника $AB + BD > AD$ и $OD + DC > OC$ и вычтите OD из каждой части неравенства.

19. Решается сложением трёх неравенств, аналогичных неравенству из задачи 18.

20. Лесник должен идти к вершине угла, а затем обратно к дому.

21. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Тогда по неравенству треугольника $AB + BD > AD$, при этом $BD = AC$, а $AD = 2AM$.

23. При таком складывании при подсчёте периметра по сравнению с периметром исходного многоугольника теряется длина ломаной $A \dots X \dots B$, но добавляется длина отрезка AB (где AB — отрезок, по которому прямая пересекает многоугольник). Из неравенства треугольника следует, что периметр уменьшается.

24. Рассмотрим те две из этих сторон, которые не имеют общих вершин, — это стороны AB и CD (рис. 123). Тогда, с одной стороны, $AC + BD < AB + CD$ (так как AC и BD — диагонали), а с другой стороны, если AC и BD пересекаются в точке O, то $OA + OB > AB$ и $OC + OD > CD$, и, складывая эти неравенства, мы получаем $AB + CD < AC + BD$ — противоречие.

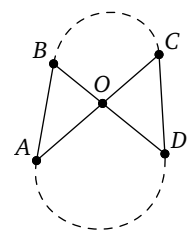


Рис. 123

25. Пусть медианы пересекаются в точке M. Тогда, складывая неравенства $AM + BM > AB$, $BM + CM > BC$ и $CM + AM > AC$ и учитывая то, что длины отрезков AM, BM и CM составляют 2/3 длин медиан, получаем требуемое неравенство.

26. Если ширина реки — h, а деревни расположены в точках A и B, то концы моста расположены в точках пересечения прямых $A'B$

и AB' с берегами, где A' и B' получаются из A и B при параллельном переносе на расстояние h к реке.

27. Рассмотрите самую длинную диагональ XY пятиугольника и две пересекающиеся диагонали, один из концов которых есть точка X или Y соответственно.

Игры

2. После каждого хода количество кучек увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце — 45. Таким образом, всего будет сделано 42 хода. Последний, выигрывающий 42-й ход сделает второй игрок.

3. Чётность результата не зависит от расстановки плюсов и минусов, а зависит только от количества нечётных чисел в первоначальном наборе. Так как в данном случае их 10 (т. е. чётное число), выигрывает первый игрок.

4. После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно поставить ладей, уменьшается на 1. Поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный ход будет сделан вторым игроком.

5. Чётность числа единиц на доске после каждого хода не меняется. Поскольку сначала единиц было чётное число, после последнего хода на доске не может оставаться одна (нечётное число!) единица. Поэтому выигрывает второй игрок.

6. В процессе игры (сравните с алгоритмом Евклида) обязательно будет выписан наибольший общий делитель исходных чисел. Следовательно, будут выписаны и все числа, кратные ему, не превосходящие большего из исходных чисел. В нашем случае НОД равен 1. Поэтому будут выписаны все числа от 1 до 36. Таким образом, игра будет продолжаться 34 хода (два числа были написаны сначала), и выигрывает второй игрок.

7. Эта игра — не совсем шутка. В ней выигрывающий, допустив ошибку, может проиграть. Эта ошибка состоит в том, что он после своего хода оставляет невычеркнутые клетки только в одном столбце или только в одной строке, предоставляя противнику возможность выиграть в один ход. Проигравшим в этой игре является тем самым тот, кто сделает этот роковой ход. Заметим, что оставшуюся после вычёркивания горизонтали часть клетчатой доски $m \times n$ можно представить себе как доску $(m-1) \times n$. Аналогично после вычёркивания вертикали остаётся доска $m \times (n-1)$. Ситуация, в которой каждый ход является «роковым», только одна — это доска 2×2. Таким образом, выигрывает игрок, после хода которого она возникла. Однако, как

мы видели, при каждом ходе суммарное количество горизонталей и вертикалей на доске уменьшается на 1. Поэтому чётность этой суммы в начале игры определяет победителя. В пункте а) выигрывает первый игрок, а в пунктах б) и в) — второй. Заметим, что в пункте б) решающим соображением может быть и симметричная стратегия второго игрока (см. § 2).

11. Выигрывает второй. Можно использовать как центральную, так и осевую симметрию.

12. Выигрывает первый. Первый ход в центр доски, а затем — центральная симметрия.

13. В обоих пунктах выигрывает второй игрок. а) Осевая симметрия. б) Центральная симметрия; решающим соображением является то, что если два симметричных поля не побиты, то поля, с которых оба они бьются, также не побиты.

14. Выигрывает второй. Центральная симметрия.

15. Выигрывает первый. Первым ходом он снимает центральную шашку, а потом играет центрально-симметрично.

16. Выигрывает первый. Первым ходом он уравнивает количество камней в кучках, после чего играет, как в задаче 10.

17. Выигрывает первый. Первым ходом он проводит хорду, по обе стороны от которой расположено по 9 вершин. После этого на каждый ход второго он отвечает аналогичным ходом по другую сторону от этой хорды.

18. В обоих пунктах выигрывает второй игрок. Независимо от хода первого игрока, второй может после своего хода оставить две одинаковые по длине цепочки лепестков. Дальше применяется симметрия.

19. а) и б) Выигрывает второй. Центральная симметрия. в) Выигрывает первый. Первым ходом он протыкает ряд, состоящий из центральных кубиков четырёх слоёв 3×3. Дальше применяется центральная симметрия.

20. В этой игре проигрывает тот, кто отломит кусок ширины 1. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он разламывает шоколадку на два куска 5×5. Дальше — симметрия.

21. Выигрывает первый. Первым ходом он ставит крестик в центральную клетку. Затем после каждого хода второго игрока первый ставит крестик в центрально-симметричную клетку.

23. Выигрывает первый игрок. Занумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски в естественном порядке. Координаты поля a1 — (1, 1), поля h8 — (8, 8). Выигрышными являются позиции, в ко-

торых король стоит на поле с чётными координатами. Первый ход — на поле b2.

24. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции с двумя нечётными кучками. Первый ход — съесть кучку из 21 конфеты и разделить кучку из 20 конфет на любые две нечётные кучки.

25. Выигрывает второй игрок. Выигрышными являются позиции, в которых между шашками находится кратное 3 число пустых клеток.

26. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в коробке остаётся $2^n - 1$ спичка. Первый ход — оставить 255 спичек.

27. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в максимальной по количеству камней кучке остаётся $2^n - 1$ камень. Первый ход — первую и вторую кучки можно разбивать как угодно, а третью — на кучку из 63 камней и кучку из 7 камней.

28. В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу. Побеждает первый. Выигрышными позициями являются нечётные числа.

29. В пункте а) выигрывает второй игрок, в пункте б) — первый. В этой игре выигрышными являются позиции, при которых в каждой кучке нечётное число спичек.

32. Выигрывает второй игрок. Расстановка плюсов и минусов приведена на рис. 124.

33. Переформулируем пункты а) и б) в терминах шахматной доски. Игра а) оказывается тождественной игре из задачи 23. Расстановка плюсов и минусов в пункте б) такая же, как в пункте а) (см. рис. 46 к задаче 23). В обоих пунктах выигрывает первый игрок.

−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
+	−	−	−	−	−	−	−

Рис. 124

34. Выигрывает первый. Расстановка плюсов и минусов после переформулировки в терминах клетчатой доски показана на рис. 125.

35. Эта задача является примером того, что геометрическая интерпретация необязательна для проведения анализа с конца. Здесь плюсами и минусами удобно помечать числа. Плюсом оказываются помечены числа, делящиеся на 10. Таким образом, выигрывает второй игрок.

36. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа от 56 до 111 и от 4 до 6. Таким образом, выигрывает первый игрок (его первый ход — число 4, 5 или 6).

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	+
+	+	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−	+
+	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+

Рис. 125

37. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции: 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3. Выигрывает первый игрок.

38. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа, делящиеся на 3. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он может, например, вычесть 1, 4, 16.

Индукция

34. В самом деле,

$$a_3 = 1, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = -2, \quad a_6 = -1, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = 2.$$

Значит, при $n = 1, 2$ имеем $a_{n+6} = a_n$. Далее — очевидная индукция.

35. Для натуральных чисел от 1 до 5 это проверяется непосредственно. Если x — данное натуральное число, то рассмотрим Φ_n — максимальное из чисел Фибоначчи, не больших x. Тогда выполнено неравенство $0 \leqslant x - \Phi_n < \Phi_{n-1}$, и, значит, $x - \Phi_n$ можно представить как сумму нескольких различных чисел Фибоначчи, меньших Φ_{n-1}.

42. *Указание.* Вычислите сначала некоторое произвольное число, не равное m и n, после чего используйте индукцию по сумме чисел m и n.

43. Индукционный переход следует из формулы

$$3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 2^{n+1} + 1,$$

верной для любого целого n.

44. Достаточно доказать, что $2^x \geqslant x + 1$ для любого неотрицательного целого x.

45. *Указание.* Докажите сначала, что любой квадрат можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить прямоугольник, одна из сторон которого имеет длину 1.

46. Индукционный переход доказывается так: разобьём 2^{n+1} чисел на две половины по 2^n чисел в каждой. В этих половинах выберем по 2^{n-1} чисел, сумма которых делится на 2^{n-1}. Затем из оставшихся 2^n чисел опять выберем третий набор из 2^{n-1} чисел, сумма которых делится на 2^{n-1}. Пусть суммы чисел в этих трёх наборах равны $2^{n-1}a$, $2^{n-1}b$ и $2^{n-1}c$. Тогда среди чисел a, b, c есть два числа одинаковой чётности. Соответствующие им наборы надо объединить в один набор из 2^n чисел — сумма чисел в нём будет делиться на 2^n.

47. Ответы: а) $n^2 - n + 2$; б) $3n^2 - 3n + 2$.

48. *Указание.* Допустим, что искомая раскраска в три цвета у вас уже имеется. Докажите тогда, что при добавлении ещё одной окружности с хордой можно изменить старую раскраску так, чтобы новая раскраска возникшей конфигурации была правильной.

Делимость-2. Сравнения и диофантовы уравнения

8. $30^{99} \equiv (-1)^{99} \equiv -1 \pmod{31}$, $61^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1 \pmod{31}$.

9. б) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + (-1)^{n-1}b^{n-1})$.

10. Рассмотрите сумму симметричных слагаемых.

11. Рассмотрите числа вида $9k+4$.

13. Если x — удобное число, то и $10001 - x$ также удобное.

14. В дополнение к основной идее решения задачи 13 используйте также, что 5000^2 делится на 10000.

15. а) Нет; б) нет. **16.** Например, -1 или $n-1$. **17.** 5. **18.** 2857.

19. а) $k - 1 = 3p + 2$, а по модулю 3 квадраты могут давать лишь остатки 0 или 1; б) $k + 1 = 4q + 3$, а по модулю 4 квадраты могут давать лишь остатки 0 или 1.

20. Нет, $n^2 + n + 1$ не может даже делиться на 5.

22. Докажите, что сумма делителей делится и на 3, и на 8.

23. а) Рассмотрите остатки членов последовательности по модулю 4 и докажите, что они повторяются по циклу; б) $a_n - 22$ делится на a_{n-6}.

25. *Указание.* Все степени числа 10 начиная со 100 делятся на 4.

26. Число делится на 2^n (на 5^n) тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на 2^n (на 5^n).

28. Две последние цифры квадрата числа n зависят только от двух последних цифр числа n. Пусть $n = \overline{\ldots ab}$. Тогда

$$\overline{ab}^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Ясно, что цифра десятков числа b^2 должна быть нечётной. Прямой перебор показывает, что цифра единиц должна тогда быть равной 6.

29. Рассмотрите остатки по модулю 16.

32. а) Нет; б) нет. Рассмотрите остатки по модулю 9. **33.** 7.

34. Эти числа имеют одинаковые суммы цифр и, значит, одинаковые остатки по модулю 9.

35. Это можно сделать шестью способами: 1155, 4155, 7155, 3150, 6150, 9150.

36. Два числа: 6975, 2970. **37.** Это число 1023457896.

38. Разберите два случая: последняя цифра равна или не равна 6.

39. Нет. Рассмотрите остатки по модулю 3.

41. 7.

43, 44. Это число делится на 11.

45. $\overline{aabb}$ делится на 11, а $\overline{cdcdcdcd}$ — нет.

46. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 нельзя разбить на две тройки, разность сумм в которых делится на 11.

47. Эти два числа имеют одинаковые остатки как при делении на 9, так и при делении на 11.

48. Нельзя. Проследите за последней цифрой.

49. $\overline{aba} = 101a + 10b = 7(14a + b) + 3(a + b)$.

50. $\overline{abc} = 100a + 10b + c \equiv 2a + 3b + c \pmod 7 \equiv b - c \pmod 7$, так как $2(a + b + c) \equiv 0 \pmod 7$. Значит, $\overline{abc}$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $b - c$ делится на 7. Но так как b, $c < 7$, это условие равносильно тому, что $b = c$.

51. а) $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} \equiv \overline{def} - \overline{abc} \pmod 7$, так как 1001 делится на 7. б), в) Число делится на 7 (13) тогда и только тогда, когда на 7 (13) делится знакопеременная сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа. Пример: 10345678. Образуем знакопеременную сумму: $678 - 345 + 10 = 343$. Она делится на 7, значит, и исходное число делится на 7. И в самом деле, оно равно $7 \cdot 1477954$.

52. Число делится на 37 тогда и только тогда, когда сумма чисел, образованных тройками последовательных цифр данного числа, делится на 37.

53. Нет, не существует. В самом деле, $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$, где a и c — разные цифры.

54. Запись этого числа состоит из 300 единиц.

55. Нет. Рассмотрите остатки по модулю 5.

57. 69. **58.** $7744 = 88^2$. **59.** 625 и 376. **60.** Рассмотрите остатки по модулю 7.

61. Домножьте число на 1111 и докажите, что результат делится на число вида $1000\ldots001$.

63. Это уравнение не имеет целых решений. Левая часть делится на 3, в то время как правая часть не делится на 3.

65. $x = 16k - 2$, $y = -7k + 1$; k — любое целое число.

66. $x = 5p + 3q - 11$, $y = 11 - 5p - 2q$, $z = p$; p, q — любые целые числа.

67. Это возможно тогда и только тогда, когда m и n взаимно просты. Переформулируйте второй вопрос как отыскание решения уравнения $am - bn = 1$ в неотрицательных целых числах с минимальной суммой $a + b$. Теперь заметим, что это равносильно нахождению минимального неотрицательного a такого, что am сравнимо с 1 по модулю n.

68. $(-4, 9)$, $(20, -33)$, $(4, -9)$, $(-20, 33)$.

70. Решений в целых числах нет.

71. $(2,0)$, $(2,1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$.

73. Решений в целых числах нет (модуль 7).

75. Решений в целых числах нет (модуль 5).

76. Решений в целых числах нет (модуль 8).

79. $a=b=c=3$; $\{a,b,c\}=\{2,3,6\}$ или $\{2,4,4\}$; одно из чисел равно 1, а сумма двух других равна 0, например, $a=1$, $b=-c=13$.

80. $x=\pm 498$, $y=\pm 496$ или $x=\pm 78$, $y=\pm 64$, причём знаки выбираются независимо.

81. Если $n=pq$ $(p,q>1)$, то

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n(n-1)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n}=\frac{1}{p(q-1)}-\frac{1}{pq(q-1)}.$$

Если же n простое, то $n(y-x)=xy$, и, значит, xy делится на n, т. е. x или y делится на n. Ясно, что именно y делится на n: $y=kn$. Тогда $x=kn/(k+1)$, следовательно, $k=n-1$, т. е. есть ровно одно представление

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n(n-1)}.$$

82. Преобразуйте уравнение к виду

$$x^3=(2y-1)(2y+3)$$

и обратите внимание, что нечётные числа $2y-1$ и $2y+3$ взаимно просты, а значит, оба должны быть кубами целых чисел.

83. Все решения этого знаменитого уравнения Пифагора («пифагоровы тройки») описываются формулами

$$x=k(m^2-n^2), \quad y=k(2mn), \quad z=k(m^2+n^2),$$

где k, m и n — произвольные целые числа.

84. Это уравнение (традиционно называемое уравнением Пелля для показателя 5) имеет следующий набор решений. Рассмотрим пару $x_1=9$, $y_1=4$, которая, очевидно, является решением данного уравнения. Теперь определим последовательности (x_n) и (y_n) при помощи следующих рекуррентных соотношений:

$$x_{n+1}=x_1x_n+5y_1y_n, \quad y_{n+1}=x_1y_n+y_1x_n$$

для каждого натурального n. Тогда пары $(\pm x_n,\pm y_n)$ представляют собой все решения уравнения.

86. $ka-kb$ делится на kn, т. е. $k(a-b)=mkn$. Следовательно, $a-b=mn$, что и требовалось доказать.

87. Вследствие малой теоремы Ферма он равен 1.

89. $300^{3000} = (300^{500})^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Аналогично $300^{3000} \equiv 1 \pmod{11}$ и $\pmod{13}$.

Следовательно, $300^{3000} - 1$ делится и на 7, и на 11, и на 13, т. е. на 1001.

90. 7. **92.** Это число делится на 31.

93. $(a+b)^p \equiv (a+b) = a+b \equiv a^p + b^p \pmod p$.

94. Докажите, что для произвольного целого x верно сравнение $x^5 \equiv x \pmod{30}$.

95. а) Докажите, что $p^q + q^p - p - q$ делится и на p, и на q. б) Воспользуйтесь результатом пункта а).

96. Положите $b = a^{p-2}$.

97. Воспользуйтесь результатом задачи 96.

98. $(n^8+1)(n^8-1) = n^{16} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

99. а) $111\ldots11$ (p единиц) $= \dfrac{10^p - 1}{9}$, а $10^p - 1$ не делится на p, так как $10^p - 1 \equiv 10 - 1 \equiv 9 \pmod p$; б) $111\ldots11$ ($p-1$ единица) $= \dfrac{10^{p-1} - 1}{9}$. Число $10^{p-1} - 1$ делится на p, так как p взаимно просто с 10. Теперь воспользуйтесь тем, что p взаимно просто с 9.

100. Воспользуйтесь тем, что

$$10^p \equiv 10 \pmod p, \quad 10^{2p} \equiv 100 \pmod p, \quad \ldots, \quad 10^{8p} \equiv 10^8 \pmod p.$$

Комбинаторика-2

7. $C_{10}^3 = 120$. **8.** $3C_6^2 C_{60}^{20}$.

9. а) $10C_{11}^2 + 11C_{10}^2 = 1045$; б) $C_{11}^2 C_{10}^2 = 2475$.

10. $C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + C_{15}^4 + C_{15}^5 = 4944$.

11. Выберите сначала семьи, а потом в каждой паре конкретного представителя. Ответ: $C_4^3 \cdot 2^3 = 32$.

12. Разберите три случая: в команду входит только Петя; в команду входит только Ваня; оба они в команду не входят. Ответ: $2C_{30}^{10} + C_{29}^{11}$.

13. Всё определяется местами, на которых стоят гласные буквы. Ответ: $C_7^3 = 35$.

14. $C_{12}^5 + 10C_{12}^4 + C_{10}^2 C_{12}^3 + C_{10}^3 C_{12}^2 = 23562$. **15.** $C_{32}^{12} C_{20}^{12}$.

16. а) $\dfrac{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5}{3!}$; б) $\dfrac{C_{15}^5 C_{10}^5}{2}$.

17. а) $4C_{48}^9$; б) перейдите к дополнению; ответ: $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$.

18. Разберите случаи в соответствии с тем, цифра какой чётности стоит на первом месте. Затем в каждом случае выберите места для нечётных цифр. Ответ: $C_5^2 \cdot 5^6 + C_5^3 \cdot 4 \cdot 5^5$.

19. Разберите все возможные представления чисел 2, 3, 4 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Не забывайте, что первая цифра — не ноль.

Ответ: а) 10; б) $1+2C_9^1+C_9^2=55$; в) $1+2C_9^1+C_9^1+\frac{C_9^2\cdot 3!}{2!}+C_9^3=220$.

20. $C_6^3(C_6^3-1)(C_6^3-2)(C_6^3-3)(C_6^3-4)$.

21. а) C_{45}^6; б) $C_6^3C_{39}^3=182780$. **22.** $2^{10}=1024$. **23.** $2^7=128$.

25, 26. Сумма чисел, стоящих на чётных местах в n-й строке треугольника Паскаля, равна сумме чисел, стоящих на нечётных местах той же строки.

27, 28. *Указание.* Индукция по количеству чисел на диагонали.

29. Воспользуйтесь результатами решения задач 27 и 28.

30. C_{2n}^n — количество путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к числу, стоящему на n-м месте в $2n$-й строке. Каждый такой путь проходит ровно через одно число n-й строки. При этом количество путей, проходящих через число, стоящее на k-м месте, равно $(C_n^k)^2$.

33. а) C_{n-1}^{k-1}; б) C_{n+k-1}^{k-1}. **34.** $C_{11}^4=330$. **35.** $C_{14}^2=91$.

36. Нужно указать 8 мест из 30, в которых будут произведены разрезы. Ответ: C_{30}^8.

37. C_{34}^4. **38.** C_{21}^9.

39. а) n^m; б) C_{n+m-1}^m. **40.** $C_{22}^2=231$.

41. $C_{15}^8C_{10}^8$. **42.** $C_8^2\cdot 3\cdot 3\cdot 3=756$.

43. $(C_9^5)^3$. **44.** а) n^n; б) C_{2n-1}^{n-1}.

45. Рассмотрите 7 оставшихся на полке книг. Между каждыми двумя соседними (и справа, и слева от крайних) либо есть пустое место (от одной вынутой книги), либо нет. Набор пустых мест однозначно определяет комплект вынутых книг. Ответ: C_8^5.

46. $C_{11}^5C_{10}^5$.

47. $1000000=2^6\cdot 5^6$. Каждый множитель однозначно определяется количеством двоек и пятёрок, входящих в его разложение. Суммарное количество в трёх множителях как двоек, так и пятёрок равно 6. Ответ: $(C_8^2)^2=784$.

48. 3. **49.** а) $C_{30}^4=27405$; б) $30\cdot 29\cdot 28\cdot 27=657720$.

50. Перейдите к дополнению. Ответ: $33^6-32^6=217726145$.

51. $5!=120$.

52. Переберите возможные варианты двух последних цифр.

а) 6; б) $2\cdot 2\cdot 4^2=64$.

53. $C_5^2=10$. **54.** $C_{20}^6C_{14}^6$.

55. На каждом месте каждая из цифр встречается $4^2=16$ раз. Ответ: 17760.

56. Число 6 представляется в виде суммы четырёх натуральных слагаемых двумя способами: $6=1+1+1+3$, $6=1+1+2+2$. Ответ: $4C_{13}^3\cdot 13^3+C_4^2\cdot 13^2\cdot (C_{13}^2)^2=8682544$.

57. $C_6^3C_{13}^3=5720$. **58.** $10+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6=597871$.

59. $\dfrac{C_4^2C_{32}^{16}}{2}$.

60. а) Она может побывать или не побывать на каждом из 28 некрайних полей. Ответ: 2^{28}. б) Надо представить число 29 в виде суммы 7 натуральных слагаемых (порядок важен!). Ответ: C_{28}^6.

61. $C_{10}^0C_9^4C_{17}^4+C_{10}^1C_9^3C_{18}^4+C_{10}^2C_9^2C_{19}^4+C_{10}^3C_9^1C_{20}^4+C_{10}^4C_9^0C_{21}^4=15638850$.

62. Каждый прямоугольник однозначно определяется своими левым нижним и правым верхним углами. Ответ: $pq(n-p+1)(m-q+1)$.

63. Из условия задачи следует, что кузнечик должен совершить всего 27 прыжков — по 9 в каждом направлении. Обозначим направления буквами A, B и C. Каждый путь однозначно определяется последовательностью длины 27, в которой буквы A, B и C встречаются по 9 раз. Ответ: $\dfrac{27!}{(9!)^3}$.

Инвариант

5. В качестве инварианта рассмотрите следующую величину: пусть каждый чиж получает номер, равный номеру ёлки, на которой он сидит (считая слева). Тогда сумма номеров чижей S — инвариант.

7. Докажите, что чётность числа чёрных клеток среди четырёх угловых не меняется при перекрашиваниях.

8. Задача решается так же, как и задача 7, — надо лишь рассмотреть другие четыре клетки, а именно a1, a2, b1, b2 (в шахматной нотации).

9. Проверьте, что чётность суммы чисел на доске неизменна.

13. а) Используйте раскраску доски в два цвета одноцветными и чередующимися по цвету строками. в) Используйте аналогичную раскраску в четыре цвета.

1	4	1	4	1
2	3	2	3	2
1	4	1	4	1
2	3	2	3	2
1	4	1	4	1

Рис. 126

14. Рассмотрим раскраску в 4 цвета, указанную на рис. 126. Тогда каждая плитка 2×2 содержит ровно одну клетку цвета 1, а каждая плитка 1×4 — ни одной или две клетки цвета 1. Следовательно, чётность числа плиток 2×2 должна совпадать с чётностью числа клеток цвета 1, что и доказывает утверждение задачи.

16. Инвариант — остаток числа голов Змея Горыныча по модулю 7.

17. Инвариант — остаток по модулю 11 разности между числом диллеров и число даллеров у финансиста.

18. Нельзя. Проследите за остатками по модулю 4.

20. Используйте то, что у суммы цифр тот же остаток при делении на 9, что и у самого числа.

21. Её тип — B. Проследите за чётностью разностей $N(A)-N(B)$, $N(B)-N(C)$, $N(C)-N(A)$, где $N(X)$ — число амёб типа X.

22. Сумма номеров строки и столбца при каждом ходе либо уменьшается на 2, либо увеличивается на 1. Значит, её остаток по модулю 3 каждый раз увеличивается на 1. Так как всего ходов n^2-1, а в конце сумма должна быть на 1 больше исходной, мы получаем, что n^2-2 должно делиться на 3, что невозможно. Следовательно, такого обхода нет. **Примечание.** Обратите внимание на то, что решение изложено без упоминания слова «инвариант». Что же здесь инвариантно?

23. Сумма чисел в таблице не зависит от способа её подсчёта. Именно в этом смысле это задача на инвариант.

24–26. Нельзя. В задаче 24 инвариантом служит чётность числа неправильно стоящих стаканов; в задаче 25 нужно пометить четыре такие вершины куба, что никакие две из них не соединены ребром, после чего рассмотреть разность между суммой чисел в помеченных вершинах и суммой чисел в непомеченных вершинах; в задаче 26 нужно занумеровать секторы числами от 1 до 6 по порядку, после чего рассмотреть разность между суммой чисел в «чётных» секторах и суммой чисел в «нечётных» секторах.

27. В точности те карточки (a, b), для которых $a<b$ и $b-a$ делится на 7.

28. Нельзя. Рассмотрите величину s, равную сумме числа камней и числа куч.

29. Нет, не может. В качестве инварианта рассмотрите чётность величины p, равной числу пар (a, b), в которых число a стоит правее числа b и при этом $a>b$.

30. Нельзя. Рассмотрите сумму квадратов чисел тройки.

Графы-2

2. Поскольку из всех вершин, кроме одной, выходит по 4 ребра, получаем, что и из пятой вершины также должно выходить четыре ребра.

3. Используйте индукцию по n.

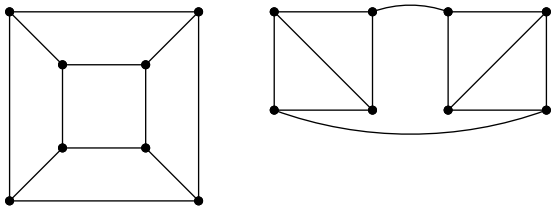


Рис. 127

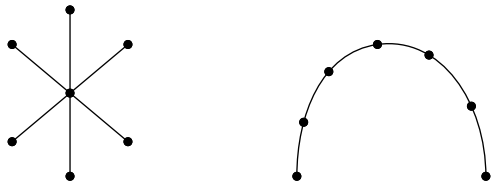


Рис. 128

4. а) Верно. Каждая вершина соединена с каждой.

б) Нет — см. рис. 127. в) Нет — см. рис. 128.

5. Если это ребро соединяет вершины с одинаковыми степенями, то в каждой компоненте нечётное число нечётных вершин. В противном случае только в одной компоненте будет вершина степени 2.

9. Рассмотрим произвольную компоненту связности этого графа. Она не является деревом, так как в ней нет висячей вершины. Значит, в ней есть цикл.

10. Предположим, что концы удалённого ребра в новом графе соединены простым путём. Тогда этот путь вместе с удалённым ребром образует в исходном графе цикл.

12. Если нет, то удалением нескольких рёбер из него можно получить дерево.

14. Ответ: $\dfrac{30 \cdot 29}{2} - 29 = 406$.

15. Выделите максимальное дерево и удалите его висячую вершину.

16. а), б) Рассмотрите «максимальное» дерево и выберите путь, соединяющий две висячие вершины.

17. 4.

19. *Указание.* Каждый кусок ограничивается не менее чем тремя рёбрами.

24. Не выполняется неравенство $E \leqslant 3V - 6$.

25. Предположим противное. Тогда $2E \geqslant 6V$, т. е. $E \geqslant 3V$, что противоречит неравенству.

26. Пусть оба эти графа плоские. Тогда у них вместе не более чем $(3 \cdot 11 - 6) + (3 \cdot 11 - 6) = 54$ ребра. Однако в полном графе с 11 вершинами 55 рёбер. Противоречие.

27. Докажите сначала неравенство $E \leqslant 3F - 6$, используя то, что из каждой вершины выходит по крайней мере 3 ребра. Обозначим количество пятиугольников через a, количество шестиугольников через b. Заметим, что $5a + 6b + 7 = 2E \leqslant 6F - 12 = 6(a + b + 1) - 12$. Отсюда следует, что $a \geqslant 13$.

29. а) Нельзя — 12 нечётных вершин; б) можно.

30. Граф связен, степени всех его вершин чётны.

31. Доказательство можно провести индукцией по n. Для доказательства индукционного перехода выберем две нечётные вершины A и B и мысленно добавим к графу ребро, соединяющее эти вершины. Тогда новый граф содержит лишь $2n - 2$ нечётные вершины, и, следовательно, его можно нарисовать, лишь $n - 1$ раз отрывая карандаш от бумаги. В некоторый момент нам будет необходимо провести карандашом по ребру AB (которого на самом деле нет) — вместо этого мы оторвём карандаш от бумаги и «перенесём» его вдоль этого ребра, добавив тем самым ещё одно отрывание.

32. Рассмотрите двух незнакомых учёных и их знакомых.

33. Предположим противное. Тогда для каждого числа от 68 до 101 есть ровно три человека, имеющие такое число знакомых. Но тогда количество людей, имеющих нечётное число знакомых, нечётно. Противоречие.

34. Соединим эти две вершины путём. Пусть a — его длина. Расстояние от любой вершины до двух данных отличаются на величину, имеющую ту же чётность, что и a.

35. Покажите, что любое дерево с 6 вершинами изоморфно одному из шести графов на рис. 129.

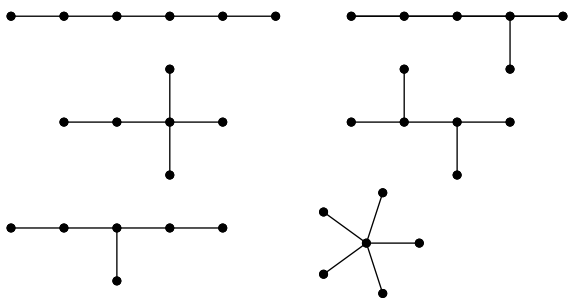


Рис. 129

36. в) Рассмотрите произвольный город X, город A, в который из X нельзя долететь не более чем с одной пересадкой, и город B, в который из X нельзя доехать на поезде не более чем с одной пересадкой. Заметьте, что эти города соединены каким-то видом транспорта.

г) Пусть из A в B нельзя долететь не более, чем с двумя пересадками; из C в D нельзя доехать на поезде не более чем с двумя пересадками. Рассмотрите граф сообщений четырёх упомянутых городов.

37. См. задачу 28 главы «Принцип Дирихле».

38. Из произвольной вершины выходит по крайней мере 6 рёбер одного цвета. Воспользуйтесь результатом задачи 37.

39. Пусть есть вершина, из которой выходит 6 синих рёбер. Тогда воспользуемся результатом задачи 37. Пусть есть вершина, из которой выходит не более 4 синих рёбер (из всех 9 вершин не может выходить по 5 синих рёбер). Тогда из неё выходит по крайней мере 4 красных ребра.

40. Из произвольной вершины выходит по крайней мере 9 рёбер одного цвета. Воспользуйтесь результатом задачи 39.

42. Пусть в столицу входит a дорог. Тогда общее число «входящих» дорог равно $21 \cdot 100 + a$, а общее количество «выходящих» дорог не больше $20 \cdot 100 + (100 - a)$. Поэтому $21 \cdot 100 + a \leqslant 20 \cdot 100 + (100 - a)$, т. е. $2a \leqslant 0$. Таким образом, $a = 0$.

43. Занумеруйте города и направьте движение от городов с меньшими номерами к городам с бóльшими номерами.

44. Рассмотрите сначала вершины, соединённые с любой фиксированной вершиной A, затем — новые вершины, соединённые с ними, и т. д. При этом рёбра, соединяющие добавляемые вершины с уже рассмотренными, ориентируйте в направлении к новым вершинам.

45. Рассмотрите эйлеров цикл, проходящий по всем рёбрам графа, и ориентируйте все рёбра в соответствии с порядком прохождения цикла.

46. Докажите, что существует замкнутый путь вдоль стрелок, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

48. Если существует команда, выигравшая и у команды-победительницы, и у всех команд, проигравших победителям, то у такой команды очков больше, чем у победителей турнира, что невозможно.

49. База — для трёх городов. Для доказательства индукционного перехода удалите город, имеющий и входящие, и выходящие дороги.

50. Для доказательства индукционного перехода выберите команду, проигравшую хотя бы один матч, удалите её и занумеруйте требу-

емым образом оставшиеся команды. Теперь из всех команд, выигравших у удалённой, рассмотрите команду с наибольшим номером.

51. Пусть команды A и B набрали одинаковое количество очков, причём команда B выиграла у A. Тогда если у любой команды C, у которой выиграла A, выиграла и B, то у B должно быть очков больше, чем у A. Следовательно, есть такая команда C, что A выиграла у C, а C выиграла у B.

52. а) Пусть из города A нельзя требуемым образом доехать до города B. Рассмотрите города, в которые входят дороги из A, и города, из которых выходят дороги в B.

б) Рассмотрим группу тех городов, в которые входят дороги из A, и группу тех городов, из которых выходят дороги в B. Вычислите общее количество дорог, выходящих из первой группы городов. Заметьте, что этих дорог достаточно много для того, чтобы хотя бы одна из них кончалась в городе из второй группы.

53. Пусть удалено ребро между вершинами A и B. Выберем две произвольные вершины. Рассмотрите три случая: обе эти вершины не совпадают с A или B, одна из них совпадает с A или с B, эти вершины — A и B.

Геометрия

1. *Указание.* Выясните, какой может быть длина третьей стороны в треугольнике, две стороны которого имеют длины a и b.

2. *Указание.* Докажите неравенства $AM > AB - \frac{BC}{2}$ и $AM > AC - \frac{BC}{2}$.

3. *Указание.* Рассмотрите окружность, вписанную в треугольник, и длины отрезков, на которые точки касания делят стороны.

4. Если бы звезду можно было нарисовать требуемым образом, то, используя неравенство № 2, мы получили бы

$$\angle BAC > \angle BCA = \angle DCE > \angle DEC = \angle FEG > \angle FGE = \\ = \angle HGI > \angle HIG = \angle KIA > \angle KAI = \angle BAC.$$

5. *Указание.* Используйте неравенства

$$\angle BAM < \angle ABM \quad \text{и} \quad \angle CAM < \angle ACM.$$

6. Это простое упражнение на применение неравенства № 1.

7. Так как $AB + CD < AC + BD$ (кстати, почему?), складывая это неравенство с данным в условии, получаем требуемое утверждение.

9. Раз $\angle A > \angle A_1$, то $BD > B_1D_1$, и, значит, $\angle C > \angle C_1$. Если же $\angle B \geqslant \angle B_1$, то аналогично $\angle D \geqslant \angle D_1$, чего быть не может, так как сумма углов в четырёхугольниках одна и та же.

10. Надо достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ и применить неравенство № 2.

11. *Указание*. Если какие-то три из данных отрезков образуют треугольник, то два из них равны. Ответ: 118.

12. а) Приложите друг к другу боковыми сторонами три копии данного треугольника. б) Отложите на стороне AB отрезок AE, равный основанию AC, и докажите, что $EB > CE > AC$.

13. Если обозначить три указанных периметра через a, b, c, то $b > c$, $b + c < a$, $2b > a$. Дальше действуйте перебором.

14. «Разверните» периметр четырёхугольника, как это показано на рис. 130.

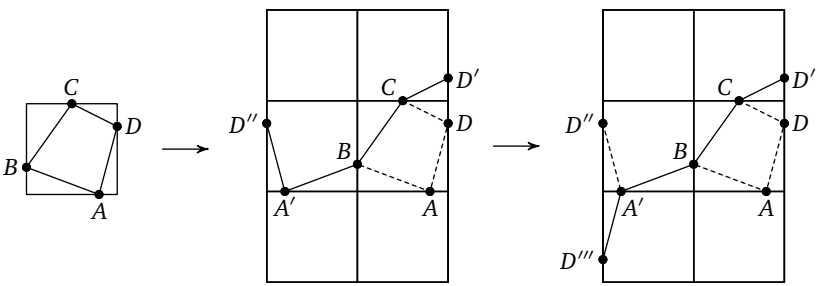


Рис. 130

15. Совместите последовательно вершины данных треугольников.

16. а) Докажите, что любая точка D остаётся на месте. б) Примените результат пункта а).

17. а) Это вновь параллельный перенос. б) Возьмите две параллельные прямые, перпендикулярные направлению переноса, расстояние между которыми равно половине длины переноса. в) Воспользуйтесь тем, что при этом движении прямая m переходит в себя.

18. Да, всегда. Достаточно перевести центр в центр.

19. Только тождественный поворот (на 0 или 360 градусов) может перевести полуплоскость в себя. А вот осевая симметрия, очевидно, может это сделать, если её ось перпендикулярна границе полуплоскости.

20. Да, это верно. Убедитесь, что фигура самосовмещается при повороте на 24° вокруг точки O.

21. *Указание.* Используйте центральную симметрию.

22. *Указание.* Используйте параллельный перенос.

24. Перенесите отрезки AB и MN параллельно основанию AD на расстояния BC и $BC/2$ соответственно.

25, 26. *Указание.* Используйте поворот на 90° и 60°.

27. а) Если эти точки X и Y лежат по разные стороны от данной прямой L, то $M = (XY) \cap L$; если по одну сторону, то $M = (XY_1) \cap L$, где точка Y_1 симметрична точке Y относительно L. б) Если X и Y лежат по одну сторону от L, то $M = (XY) \cap L$; если по разные, то $M = (XY_1) \cap L$, где точка Y_1 симметрична Y относительно L.

28. а) А, В, Д, Е, Ж, З, К, Л, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Ш, Э, Ю. Конечно, здесь ответ частично зависит от написания букв. Буквы В, Д, З, Л обычно пишутся не совсем симметричным образом. б) Ж, И, Н, О, Ф, Х.

29. Отразите первую ось относительно второй.

30. Нет.

31. Это точки, из которых отрезок OS (O — центр поворота) виден под углом $90^\circ + \alpha/2$ или $90^\circ - \alpha/2$, — уточните это множество точек (α — угол поворота).

34. Нет, иначе сумма этих углов будет равна 180°.

35. Рассмотрите трапецию с вершинами A, B, C и D. Воспользуйтесь тем, что накрест лежащие углы, образованные диагональю с основаниями трапеции, равны.

36. Эти углы равны $2x$, $3x$, и $4x$, где $x = 180/7$, 30 или 36 градусов.

38. Угол AOD равен, очевидно, 60°. Далее, треугольник DOC равнобедренный, и мы получаем $\angle DOC = 75^\circ$. Следовательно, ответ: $\angle AOC = 135^\circ$.

39. Углы ABC и ABD равны 90°, и, значит, $\angle CBD = 180^\circ$, что и требовалось доказать.

40. а) Пусть $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Тогда $S(ABC) \leqslant ab/2$, $S(CDA) \leqslant cd/2$ и осталось лишь сложить эти неравенства. б) Используйте пункт а) и то, что четырёхугольник $ABCD$ можно, разрезав по диагонали AC и перевернув одну из частей, превратить в четырёхугольник с той же площадью, но с порядком сторон a, b, d, c.

42. Так как $bc/2 \geqslant 1$, получаем, что $b^2 \geqslant 2$.

43. Да, такое возможно. Рассмотрите треугольник ABC, в котором $AC = 2002 + \varepsilon$, $AB = BC = 1001$, где ε — маленькое положительное число.

44. Разрежьте $ABCD$ на две части диагональю AC и докажите требуемое равенство для каждой части отдельно.

45. Ответ: 12.

46. Ответ: 7. Площадь каждого из трёх «дополнительных» треугольников равна 2 — докажите это.

47. Равенство площадей равносильно равенству высот, опущенных из A и C соответственно на BM, а это ввиду наличия соответству-

ющих равных треугольников равносильно тому, что точка пересечения прямых (BM) и (AC) делит отрезок AC пополам.

48. Воспользуйтесь результатом задачи 44.

49. Докажите, что треугольники ABD и ACD равновелики.

50. Если дана точка O в равностороннем треугольнике ABC, то можно подсчитать площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников OAB, OBC и OAC, опуская перпендикуляры из O на стороны треугольника.

Системы счисления

Упражнения

1. а) 2; б) n.

2. $10101_2 = 21$, $10101_3 = 91$, $211_4 = 37$, $126_7 = 69$, $158_{11} = 184$.

3. $100_{10} = 1100100_2 = 10201_3 = 1210_4 = 400_5 = 244_6 = 202_7 = 144_8 = 121_9$.

4. $111_{10} = A1_{11}$. **6.** а) 11001_2; б) 21202_3. **7.** а) 2626_7; б) 1003_7.

Задачи

1. В двенадцатеричной.

2. а) Да (семеричная система счисления). б) Нет. Второе равенство могло бы выполняться только в пятеричой системе счисления.

3. Число чётно тогда и только тогда, когда а) в его троичной записи чётное число единиц (сумма цифр чётна); б) его n-ичная запись оканчивается чётной цифрой при чётном n, сумма цифр чётна при нечётном n.

4. $23451 + 15642 = 42423$; семеричная система счисления.

5. Пусть n — основание системы счисления. Тогда выполнено равенство $n^2 = (2n + 4) + (3n + 2)$, т. е. $n^2 - 5n - 6 = 0$. Отсюда следует, что $n = -1$ или $n = 6$. Ответ: $n = 6$.

6. а) В n-ичной системе счисления запись числа заканчивается k нулями тогда и только тогда, когда это число делится на n^k. б) Пусть m — делитель числа n. Последняя цифра n-ичной записи числа делится на m тогда и только тогда, когда само число делится на m.

7. а) Пусть m — делитель числа $n - 1$. Сумма цифр n-ичной записи числа делится на m тогда и только тогда, когда само число делится на m. б) Знакопеременная сумма цифр n-ичной записи числа делится на $n + 1$ тогда и только тогда, когда само число делится на $n + 1$. в) Пусть m — делитель числа $n + 1$. Знакопеременная сумма цифр

n-ичной записи числа делится на m тогда и только тогда, когда само число делится на m.

12. Набор чисел такой же, как и в задаче 11.

Неравенства

2. а) $3^2=9>8=2^3$, и, значит, $3^{200}>2^{300}$; б) $2^{10}=1024<2187=3^7$, и, значит, $2^{40}<3^{28}$; в) $4^{53}>5^{44}$. **4.** $8^{91}>7^{92}$.

6. $|2^3-2^2|=4$, $|3^2-2^2|=5$, $|3^2-2^3|=1$, $|2^4-2^3|=8$, $|2^4-3^2|=7$, $|5^2-2^4|=9$, $|3^3-5^2|=2$, $|2^5-5^2|=7$, $|2^5-3^3|=5$, $|6^2-3^3|=9$, $|6^2-2^5|=4$, $|5^3-11^2|=4$, $|2^7-11^2|=7$, $|2^7-5^3|=3$. Этот ответ записан без учёта того, что $2^4=4^2$. С учётом этого факта надо добавить ещё три пары.

8. Обозначим число в числителе через x. Тогда вся дробь равна

$$a=\frac{x}{10x-9},\quad \frac{1}{a}=10-\frac{9}{x}.$$

Отсюда видно, что чем больше x, тем меньше a. Итак, первая дробь больше.

9. Ответим на более общий вопрос: когда $\frac{x}{y}$ больше, чем $\frac{x+1}{y+1}$? Выясним это при положительных x и y:

$$\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+1}=\frac{x-y}{y(y+1)}.$$

Следовательно, всё зависит от того, что больше: x или y. В данном случае $y>x$, и потому $\frac{1234568}{7654322}$ — большее из двух данных чисел.

10. 100^{100} больше, так как $100^2>150\cdot 50$.

11. $(1{,}01)^{1000}>1000$. В самом деле,

$$(1{,}01)^8>1{,}08;\quad (1{,}01)^{1000}=((1{,}01)^8)^{125}>(1{,}08)^{125}.$$

Далее,

$$(1{,}08)^5>1{,}4;\quad (1{,}01)^{1000}>(1{,}4)^{25}>(1{,}4)^{24}>(2{,}7)^8>7^4=2401>1000,$$

что и требовалось доказать.

13. Поскольку $99!>100$, получаем, что $A<B$.

17. Это — неравенство Коши для чисел 1 и x.

19, 20. Перегруппировав слагаемые, получаем $(x-y)^2\geqslant 0$.

21. Приводим к общему знаменателю и получаем $(x-y)^2\geqslant 0$.

23. Надо перемножить три неравенства: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$, $c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$.

24. $(\sqrt{ab}-\sqrt{ac})^2+(\sqrt{ac}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{bc}-\sqrt{ab})^2\geqslant 0$.

25. Воспользуйтесь неравенством из задачи 22 для $z = 1$.

27. $x^4 + y^4 + 8 = x^4 + y^4 + 4 + 4 \geqslant 4\sqrt[4]{x^4y^4 \cdot 4 \cdot 4} = 8|xy|$.

28. $a+b+c+d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$. Осталось лишь перемножить неравенства.

29. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 3$.

42. Для положительных k, l, m неравенство очевидно, ибо каждое из трёх слагаемых слева не превосходит четверти выражения справа. Теперь разберите отдельно случаи, когда либо одно, либо два, либо все три числа k, l, m равны нулю.

43. $ab+bc+ca = \frac{1}{2}\left((a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2\right) = -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \leqslant 0$.

45. Перенося все слагаемые в одну часть, получаем

$$\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \geqslant 0.$$

47. Основная идея: если перестановка (c_i) не тождественная, то найдутся такие номера i и j, что $c_i > c_j$ при $i < j$. Тогда, поменяв c_i и c_j местами, мы увеличим сумму произведений. В самом деле,

$$c_ia_i + c_ja_j - c_ja_i - c_ia_j = (a_i - a_j)(c_i - c_j) < 0.$$

Такими двойными перестановками мы приведём перестановку (c_i) к тождественной, в то время как сумма произведений не уменьшится.

53. База очевидна. Переход:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

54. Решение совершенно аналогично предыдущему. Нужно лишь поменять знаки неравенств.

58. База $n = 4$ проверяется непосредственно. Переход:

$$(n+1)! = (n+1)n! > 2^n(n+1) > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

59. База $n = 1$ очевидна. Переход: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2 \cdot 2n = 4n \geqslant 2(n+1)$.

60. При $n \geqslant 10$.

Список литературы

1. Общая литература

1. *Барр Ст.* Россыпи головоломок. М.: Мир, 1978.
2. *Бизам Д.*, *Герцег Я.* Игра и логика. М.: Мир, 1975.
3. # *Бизам Д.*, *Герцег Я.* Многоцветная логика. М.: Мир, 1978.
4. *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. М.: Наука, 1969.
5. # *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971.
6. # *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир, 1972.
7. # *Гарднер М.* Математические новеллы. М.: Мир, 1974.
8. *Гарднер М.* Есть идея! М.: Мир, 1982.
9. *Гарднер М.* А ну-ка, догадайся! М.: Мир, 1984.
10. *Гарднер М.* Крестики-нолики. М.: Мир, 1988.
11. *Гарднер М.* Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.
12. *Дынкин Е. Г.*, *Успенский В. А.* Математические беседы. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.
13. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. М.: ГИТТЛ, 1958.
14. *Курант Р.*, *Роббинс Г.* Что такое математика?. М.: Просвещение, 1968.
15. *Кэрролл Л.* История с узелками. М.: Мир, 1985.
16. *Линдгрен Г.* Занимательные задачи на разрезание. М.: Мир, 1977.
17. *Радемахер Г. Р.*, *Теплиц О.* Числа и фигуры. М.: Физматгиз, 1962.
18. *Смаллиан Р.* Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.
19. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? М.: Мир, 1985.
20. *Смаллиан Р.* Алиса в стране Смекалки. М.: Мир, 1987.
21. *Уфнаровский В. Л.* Математический аквариум. Кишинёв: Штиинца, 1987.

2. Методическая литература

22. *Бугаенко В. О.* Математический кружок, 9 класс. М.: Изд-во мех-мата МГУ, 2000.
23. # *Бураго А. Г.* Дневник математического кружка: первый год занятий. М.: МЦНМО, 2017.
24. *Генкин С. А.*, *Итенберг И. В.*, *Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.
25. *Гусев А. А.* Математический кружок. 5 класс. М.: Мнемозина, 2015.
26. # *Гусев В. А.*, *Орлов А. И.*, *Розенталь А. Л.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. М.: Просвещение, 1977, 1984.

27. Математический кружок. Первый год обучения, 5–6 классы. М.: Изд-во АПН СССР, 1990.
28. *Пойа Д.* Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1959, 1961.
29. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970.
30.# *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
31. *Рожковская Н.* Математические семинары для младшеклассников. Беркли-2009. Новосибирск, 2011.
32. *Сикорский К. П.* (сост.). Дополнительные главы по курсу математики 7–8 классов для факультативных занятий. М.: Просвещение, 1969.
33. *Burago A.* Mathematical Circle Diaries, Year 1. AMS, 2013.
34. *Burago A.* Mathematical Circle Diaries, Year 2. AMS, 2018.
35. *Dorichenko S.* A Moscow Math Circle: Week-By-Week Problem Sets. AMS, 2012.
36. *Fomin D.*, *Genkin S.*, *Itenberg I.* Mathematical Circles: Russian Experience. AMS, 1996.
37. *Givental L.*, *Nemirovskaya M.*, *Zakharevich I.* Math Circle by the Bay: Topics for Grades 1–5. AMS, 2018
38. *Stankova Z.*, *Rilke T.* A Decade of the Berkeley Math Circle: The American Experience, Volume 1. AMS, 2008.
39. *Vandervelde S.* Circle in a Box. AMS, 2012.

3. Литература для младших школьников

40. *Бобров С.* Волшебный двурог. М.: Детская литература, 1967.
41. *Лёвшин В.* Три дня в Карликании. Сказка да не сказка. М.: Детская литература, 1964.
42. *Лёвшин В.*, *Александрова Э.* Черная маска из Аль-Джебры. Путешествие в письмах с прологом. М.: Детская литература, 1965.
43. *Лёвшин В.* Фрегат капитана Единицы. М.: Детская литература, 1968.
44. *Лёвшин В.* Магистр Рассеянных Наук: математическая трилогия. М.: Детская литература, 1987.

4. Задачники

45. *Агаханов Н. Х. и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы. М.: МЦНМО, 2007.
46.# *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.
47. *Берлов С. Л.*, *Иванов С. И.*, *Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. [1994-99 гг.]. СПб. — М. — Краснодар: Лань, 2004.
48. *Бугаенко В. О.* Турниры им. Ломоносова. М.: МЦНМО, 1998.
49.# *Бураго Д. Ю.*, *Финашин С. М.*, *Фомин Д. В.* Факультативный курс математики для 6–7 классов в задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
50.# *Васильев Н. Б.*, *Гутенмахер В. Л.*, *Раббот Ж. М.*, *Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1986.

51. *Васильев Н. Б.*, *Молчанов С. А.*, *Розенталь А. Л.*, *Савин А. П.* Математические соревнования (геометрия). М.: Наука, 1974.

52. *Гальперин Г. А.*, *Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

53. *Германович П. Ю.* Сборник задач по математике на сообразительность. М.: Учпедгиз, 1960.

54. *Дынкин Е. Б.*, *Молчанов С. А.*, *Розенталь А. Л.* Математические соревнования. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1970.

55. *Дынкин Е. Б.*, *Молчанов С. А.*, *Розенталь А. Л.*, *Толпыго А. К.* Математические задачи. М.: Наука, 1971.

56. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач Московских математических олимпиад (V–VIII классы). М.: Просвещение, 1971.

57.# *Леман А. А.* Сборник задач Московских математических олимпиад. М.: Просвещение, 1965.

58. *Островский А. И.* 75 задач по элементарной математике — простых, но... М.: Просвещение, 1966.

59. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Части 1, 2. М.: Наука, 1986.

60. *Рубанов И. С.*, *Гершкович В. Я.*, *Молочников И. Е.* Методические материалы для внеклассной работы со школьниками по математике. Л.: Ленинградский дворец пионеров, 1973.

61. *Сергеев И. Н.*, *Олехник С. Н.*, *Гашков С. Б.* Примени математику. М.: Наука, 1989.

62. *Спивак А. В.* Математический кружок. 6–7 классы. М.: Посев, 2003.

63. *Спивак А. В.* Тысяча и одна задача по математике. М.: МЦНМО, 2010.

64. *Федоров Р. М.*, *Канель-Белов А. Я.*, *Ковальджи А. К.*, *Ященко И. В.* Московские математические олимпиады 1993–2005. М.: МЦНМО, 2008.

65. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

66.# *Шклярский Д. О.*, *Ченцов Н. Н.*, *Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1965.

67. *Штейнгауз Г.* Сто задач. М.: Наука, 1976.

5. К теме «Комбинаторика»

68.# *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1964.

69. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика // Квант. 1971. № 1.

70.# *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

71. *Ежов И. И. и др.* Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.

72. *Успенский В. А.* Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1979. (Популярные лекции по математике; Вып. 43).

6. К теме «Делимость»

73. *Башмаков М. И.* Нравится ли вам возиться с целыми числами? // Квант. 1971. № 3.
74. *Вагутен В. Н.* Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики // Квант. 1972. № 6.
75. *Воробьев Н. Н.* Признаки делимости. М.: Наука, 1963. (Популярные лекции по математике; Вып. 39).
76. *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах. М.: Наука, 1983. (Популярные лекции по математике; Вып. 8).
77.# *Егоров А. А.* Сравнения по модулю и арифметика остатков // Квант. 1970. № 5.
78.# *Калужнин Л. А.* Основная теорема арифметики. М.: Наука, 1969. (Популярные лекции по математике; Вып. 47).
79.# *Оре О.* Приглашение в теорию чисел // Библиотечка «Квант». М.: Наука, 1980.

См. также [32].

7. К теме «Принцип Дирихле»

80. *Болтянский В. Г.* Шесть зайцев в пяти клетках // Квант. 1977. № 2.
81. *Орлов А. И.* Принцип Дирихле // Квант. 1971. № 3.

См. также [21, 26], [59, гл. 20], [60].

8. К теме «Графы»

82. *Березина Л. Ю.* Графы и их применение. М.: Просвещение, 1979.
83.# *Оре О.* Графы и их применение. М.: Мир, 1965.
84. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.

См. также [12, 26].

9. К теме «Геометрия»

85. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Часть 1. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948.
86.# *Гусев В. А. и др.* Сборник задач по геометрии для 6–8 классов. М.: Просвещение, 1975.
87. *Кантор П. Р., Раббот Ж. М.* Площади многоугольников // Квант. 1972. № 2.
88. *Кокстер Г.* Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
89. *Коксетер Г., Грейтцер С.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.
90. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. М.: Мир, 1979.
91. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы планиметрии. М.: Наука, 1967.

92. *Яглом И. М.* Геометрические преобразования, т. 1. М.: Гостехиздат, 1955.

См. также [51, 59, 61].

10. К теме «Игры»

93. *Гик Е. Я.* Занимательные математические игры. М.: Знание, 1987.

94. *Касаткин В. Н.*, *Владыкина Л. И.* Алгоритмы и игры. Киев: Радяньска школа, 1984.

95.# *Орлов А. И.* Ставь на минус // Квант. 1977. № 3.

См. также [26], [5, главы 8, 14, 39], [6, главы 5, 30, 33], [7, главы 7, 18, 23, 26, 33, 36].

11. К теме «Индукция»

96. *Воробьёв Н. Н.* Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. (Популярные лекции по математике; Вып. 6).

97. *Головина Л. И.*, *Яглом И. М.* Индукция в геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. (Популярные лекции по математике; Вып. 21).

98. *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. М.: Наука, 1975. (Популярные лекции по математике; Вып. 1).

99.# *Соминский И. С.* Метод математической индукции. М.: Наука, 1965, 1974. (Популярные лекции по математике; Вып. 3).

100.# *Соминский И. С.*, *Головина Л. И.*, *Яглом И. М.* О математической индукции. М.: Наука, 1967.

См. также [21], [59, гл. 27].

12. К теме «Инвариант»

101.# *Ионин Ю. И.*, *Курляндчик Л. Д.* Поиск инварианта // Квант. 1976. № 2.

102. *Толпыго А. К.* Инварианты // Квант. 1976. № 12.

См. также [21], [59, гл. 22].

13. К теме «Системы счисления»

103.# *Фомин С. В.* Системы счисления. М.: Наука, 1968. (Популярные лекции по математике; Вып. 40).

104. *Яглом И. М.* Системы счисления // Квант. 1970. № 6.

105. *Яглом И. М.* Две игры со спичками // Квант. 1971. № 2.

См. также [5, гл. 35], [10, гл. 14], [32, 79];

14. К теме «Неравенства»

106.# *Беккенбах Э. Беллман Р.* Введение в неравенства. М.: Мир, 1965.

107. *Беккенбах Э.*, *Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.

108.# *Коровкин П. П.* Введение в неравенства. М.: Наука, 1983. (Популярные лекции по математике; Вып. 5).

109. *Кречмар В. А.* Задачи по алгебре. М.: Наука, 1964.
110. *Невяжский Г. Л.* Неравенства. М.: Учпедгиз, 1947.
111. *Пинтер Л.*, *Хегедыш Й.* Упорядоченные наборы чисел и неравенства // Квант. 1985. № 12.